



Modélisation et analyse des systèmes à paramètres distribués non linéaires par la méthode de Boltzmann sur réseau : application aux écoulements à surface libre

Diemer Anda Ondo

► To cite this version:

Diemer Anda Ondo. Modélisation et analyse des systèmes à paramètres distribués non linéaires par la méthode de Boltzmann sur réseau : application aux écoulements à surface libre. Automatique / Robotique. Université de Grenoble, 2013. Français. NNT : 2013GRENT014 . tel-00860782

HAL Id: tel-00860782

<https://theses.hal.science/tel-00860782>

Submitted on 11 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Automatique-Productique**

Arrêté ministériel : 7 Août 2006

Présentée par

Diemer ANDA ONDO

Thèse dirigée par **Laurent LEFÈVRE**
et codirigée par **Bastien CHOPARD**

préparée au sein **Laboratoire de Conception et d'Intégration des Sys-
tèmes**
et de l'**École Doctorale Électronique, Électrotechnique, Automatique,
Traitement du Signal (220)**

Modélisation et analyse des sys- tèmes à paramètres distribués non linéaires par la méthode de Boltz- mann sur réseau : application aux écoulements à surface libre

Thèse soutenue publiquement le **9 Juillet 2013**,
devant le jury composé de :

M. Eduardo MENDES

PR, Grenoble INP, Président

Mme Samira EL YACOUBI

MCF, HDR, Université de Perpignan Via Domitia, Rapporteur

M. Gilles ROUSSEL

MCF, HDR, Université du Littoral Côte d'Opale, Rapporteur

M. Guy COURBEBASSE

IR, Laboratoire CREATIS, INSA Lyon, Examineur

M. Nicolas GRATIOT

CR1, HDR, IRD, LTHE Grenoble, Invité

M. Bastien CHOPARD

PR, Université de Genève, Co-Directeur de thèse

M. Laurent LEFÈVRE

PR, Grenoble INP, Directeur de thèse



UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

RAPPORT DE THÈSE

présenté par

Diemer ANDA ONDO

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'Université de Grenoble

Spécialité : **Automatique-Productique**

préparée au laboratoire **LCIS**

dans le cadre de l'École Doctorale

Électronique, Électrotechnique, Automatique, Traitement du Signal

Titre:

**Modélisation et analyse des systèmes à paramètres distribués
non linéaires par la méthode de Boltzmann sur réseau:
application aux écoulements à surface libre**

Directeur de thèse: **Laurent LEFÈVRE**

Co-directeur de thèse: **Bastien CHOPARD**

Jury

M. Eduardo MENDES,	Président, PR, Grenoble INP
Mme. Samira EL YACOUBI,	Rapporteur, MCF, HDR, Univ. de Perpignan Via Domitia
M. Gilles ROUSSEL,	Rapporteur, MCF, HDR, Univ. du Littoral Côte d'Opale
M. Guy COURBEBAILLISSE,	Examineur, IR, Laboratoire CREATIS, INSA Lyon,
M. Nicolas GRATIOT,	Invité, CR1, HDR, IRD, LTHE Grenoble,
M. Bastien CHOPARD,	Co-directeur de thèse , PR, Université de Genève
M. Laurent LEFÈVRE,	Directeur de thèse , PR, Grenoble INP

Résumé

Nous étudions dans cette thèse, composée de deux parties, la modélisation des écoulements en eaux peu profondes par la méthode de Boltzmann sur réseau et l'analyse des propriétés de commandabilité et d'observabilité des modèles obtenus.

Dans la première partie, nous nous consacrons d'abord à la modélisation par la méthode de Boltzmann sur réseau des équations de Saint-Venant. En utilisant une linéarisation autour d'un profil d'équilibre, une représentation sous forme d'état des modèles de Boltzmann sur réseau est définie. Cette représentation incorpore les termes de force, et permet une définition complète des entrées (commandes) et des sorties (mesures).

Nous représentons ensuite les phénomènes de sédimentation dans les écoulements en eaux peu profondes avec la méthode de Boltzmann sur réseau. Ce modèle défini en une dimension est validé numériquement en le comparant avec un modèle de volumes finis qui résout les équations de Saint-Venant-Exner. Le modèle LB défini est moins gourmand en temps de calcul et plus facile à manipuler que les modèles traditionnels.

Dans la deuxième partie, nous traitons de l'analyse des propriétés de commandabilité et d'observabilité des modèles LB obtenus. La première analyse est faite sur les critères algébriques de Kalman et permet d'établir la non conservation des propriétés de commandabilité et d'observabilité lorsque l'ordre de réduction du système est augmenté.

Une analyse plus approfondie basée sur la détermination des grammians de commandabilité et d'observabilité montre également que le constat reste valide pour les méthodes de discrétisation classique. La résolution des grammians est faite avec des méthodes particulièrement adaptées aux structures creuses et de grande dimension que sont les matrices de la dynamique, de commande et/ou d'observation des modèles LB.

Enfin, nous établissons que pour une commande aux frontières classique des canaux d'irrigation en débit et hauteur, la famille de systèmes des modèles LB d'ordre réduit n'est pas uniformément commandable alors qu'avec l'utilisation des variables de scattering comme variables de commande, cette famille devient uniformément commandable.

Abstract

We study in this thesis, subdivided into two parts, the modeling of the free surface shallow water flows with the lattice Boltzmann method and the analysis of the properties of controllability and observability of the resulting models.

The first part focusses on the modeling of the shallow water flows with the lattice Boltzmann method. Using a linearization around a given equilibrium profile, we give a state space representation of the defined lattice Boltzmann models. This representation takes into account the force term, and allows a complete definition of the inputs (controls) and outputs (measures) variables.

After this, we extend the model to include the phenomena of sedimentation. The defined one-dimensional model is validated numerically by comparing it with a finite volume model which solves the Saint-Venant-Exner's equations. The defined LB model is less complex (from a numerical point of view) and easier to handle.

In the second part, we deal with the analysis of the properties of controllability and observability of the models obtained from the LB modeling of the shallow water flows. The first analysis, which is done with the Kalman's algebraic criterias, leads to the establishment of the loss of controllability when the number of discretization sites increases.

An extensive analysis, based on the determination of the controllability and observability gramians, allows to show that this conclusion remains with the classical methods of discretization. The determination of the gramians is done with particular methods well suited for the sparse and large matrices which are the dynamical, control and/or observation matrices of the LB models.

Finally, we establish that for a classical boundary control of the irrigation canal with flow and level, the family of LB systems variables is not uniformly controllable, while using scattering variables as the control variables, the family becomes uniformly controllable.

Remerciements

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire s'est déroulé sur 3 ans et 6 mois au sein du Laboratoire de Conception et d'Intégration des Systèmes (LCIS) de Valence. Ce travail n'aurait jamais abouti sans l'aide des gens, de près ou de loin qui ont accompagné ce travail. Je tiens à tous les remercier avant tout.

Je tiens à exprimer mes remerciements en premier à mes directeurs de thèse, Bastien CHOPARD et Laurent LEFÈVRE. Bastien CHOPARD, pour la patience, les judicieux conseils, les encouragements et la disponibilité à mon égard tout au long de ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance. Laurent LEFÈVRE, dont la collaboration aura été des plus agréables. De par ses conseils, sa présence, ses encouragements à aller toujours de l'avant, il m'a fait apprécier les joies de la recherche, et me surpasser dans les difficultés. Que l'amitié née de cette collaboration demeure à jamais.

Je voudrais remercier Mme Samira EL YACOUBI de l'Université de Perpignan et M. Gilles ROUSSEL de l'Université du Littoral Côte-d'Opale et leur exprimer ma gratitude pour avoir accepté de rapporter sur mon travail et ce malgré leurs nombreuses occupations.

Je tiens à remercier les professeurs Guy COURBEBAILLISSE de l'INSA de Lyon et Eduardo MENDES de l'Université de Grenoble, ainsi que M. Nicolas GRATIOT du Laboratoire d'études des Transferts en Hydrologie et Environnement (LTHE) pour l'honneur qu'ils me font en participant à mon jury de thèse.

Je remercie également les membres du LCIS, pour leur accueil, leur soutien scientifique, technique, administratif et amical. Une pensée particulière aux membres de l'équipe MACSY, avec qui les échanges ont toujours été fraternels. Une pensée particulière également aux doctorants du LCIS qui auront souvent été dans la confiance et dont les discussions et les encouragements mutuels ont su me motiver. Mes remerciements vont également aux membres du CUI à Genève, que j'ai côtoyés durant mes séjours dans leur enceinte et dont la disponibilité m'a énormément touchée, mais aussi à tous ceux qui ont rendu ce manuscrit possible.

Je ne saurais terminer sans remercier mes parents, frères et sœurs pour leur soutien et leur amitié. Une pensée particulière à ma fille Marcel-Esther et à sa maman Aimée-Michelle pour leurs sourires qui rayonnent mes journées.

Liste de Publications

Revues avec comité de lecture

[R1] V. T. Pham, B. Chopard, L. Lefèvre, D. Anda Ondo and E. Mendes, *Study of the 1D Lattice Boltzmann shallow water equations and its coupling to build a canal network*. Journal of Computational Physics, 229, 7373-7400, 2010 ;

Conférences internationales

[C1] D. Anda Ondo, L. Lefèvre, B. Chopard, *A discrete controllability of distributed parameters systems using lattice Boltzmann models : an application to shallow water equations*. Proceedings of the 18th IFAC world-congress, pp. 9206-9211. Milano, Italy, August-September 2011 ;

[C2] A. Parmigiani, J. Latt, N. Kacem, B. Chopard, L. Lefèvre, D. Anda Ondo, *Free surface lattice boltzmann simulation of irrigation canals*. Proceedings of the 8th International Conference for Mesoscopic Methods in Engineering and Science (ICMMES2011), Lyon, France. 4-8 July 2011 ;

[C3] D. Anda Ondo, L. Lefèvre, B. Chopard. *Contrôlabilité des écoulements en eaux peu profondes : étude comparative avec la LBM*. Actes de la 7e Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA2012), pp. 227-232, Grenoble, France. 4-6 Juillet 2012.

[C4] D. Anda Ondo, L. Lefèvre, B. Chopard. *Boundary port variables and uniform controllability : the shallow water example*. Accepted on the 1st IFAC Workshop on Control of Systems Modeled by Partial Differential Equations (CPDE 2013), Paris, France.

[C5] D. Anda Ondo, L. Lefèvre, B. Chopard. *A two-layers shallow water Lattice Boltzmann model for sediment transport in free surface*. Accepted, Numerical Analysis and Scientific Computation with Applications (NASCA13), June 24-26 2013, Calais, France.

Conférences nationales et divers actes

[N1] D. Anda Ondo, L. Lefèvre, B. Chopard. *Commandabilité d'un modèle de Boltzmann sur réseau en eaux peu profondes*. Actes JD-MACS 2011, pp. 335-340, 9-10 Juin 2011, Marseille, France.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Remerciements	v
Liste de Publications	vi
Table des matières	ix
Table des figures	xiii
Notations	xv
Introduction	1
I Modélisation des canaux d'irrigation et méthode de Boltzmann sur réseau	5
1 État de l'art	7
1.1 Les canaux d'irrigation	7
1.1.1 Introduction	7
1.1.2 Les grandeurs et variables caractéristiques	8
1.1.3 Classification des écoulements	9
1.1.4 La gestion des canaux d'irrigation	11
1.1.4.1 Les ouvrages de connexion et/ou de contrôle/mesure	11
1.1.4.2 Les politiques de contrôle	12
1.2 La méthode de Boltzmann sur réseau	13
1.2.1 Historique et origines	14
1.2.1.1 Les automates cellulaires	14
1.2.1.2 La méthode des Gaz sur réseau	15
1.2.2 Définitions des variables	16
1.2.2.1 Les densités	16
1.2.2.2 Les autres variables	17
1.2.3 Les dynamiques	19
1.2.3.1 La dynamique locale	19
1.2.3.2 La dynamique globale	20
1.2.4 Le traitement aux frontières	20
1.2.4.1 Conditions limites de type réseau	20
1.2.4.2 Conditions macroscopiques aux limites	22
1.3 Conclusion	23
	ix

2	Modélisation des écoulements en eaux peu profondes par la méthode LB	25
2.1	Modélisation 1D pour la commande et l'observation	26
2.1.1	Mise sous forme de représentation d'état	26
2.1.1.1	La dynamique locale	26
2.1.1.2	La dynamique globale	27
2.1.1.3	Modèle avec terme de force	29
2.1.1.4	Modèle linéarisé	29
2.1.2	À propos des entrées et des sorties	34
2.1.3	Formalisme semi-groupe	35
2.2	Extension en 2D	36
2.2.1	La méthode de Boltzmann sur réseau en 2D	37
2.2.2	Interconnexion 1D-2D	39
2.2.2.1	Scénario de simulation	40
2.2.2.2	Résultats de simulation	41
2.3	Modélisation discrète des écoulements en eaux peu profondes via d'autres méthodes	42
2.3.1	La méthode des différences finies	44
2.3.2	La méthode des volumes finis :	47
2.3.3	La méthode de collocation par points	48
2.4	Comparaisons des méthodes	50
2.4.1	Scénario de simulation	50
2.4.2	Résultats de simulation	50
2.5	Conclusion	53
3	Sur le phénomène de sédimentation	55
3.1	Généralités	55
3.1.1	Introduction	55
3.1.2	La modélisation du phénomène de sédimentation par EDP	55
3.2	LB et sédimentation	57
3.2.1	Modèle bi-fluide	57
3.2.2	Modèle 2 – <i>swe</i> 1D	59
3.3	Validation et expérimentations	62
3.3.1	Méthode des volumes finis (Castro et al. (2008), Cordier et al. (2011))	63
3.3.2	Solutions en régime stationnaire	64
3.3.3	États d'équilibre avec le modèle LB	68
3.3.4	Cas d'une rupture de barrage	69
3.4	Conclusion	71
II	Contrôlabilité des modèles de Boltzmann sur réseau	73
4	Commandabilité et Observabilité des écoulements en eaux peu profondes	75
4.1	Généralités	75
4.1.1	Introduction	75
4.1.2	Commandabilité/Observabilité en dimension finie	76

4.1.2.1	La commandabilité	76
4.1.2.2	L'observabilité	77
4.1.2.3	Dualité	78
4.1.3	Commandabilité/Observabilité en dimension infinie	78
4.1.3.1	La commandabilité	79
4.1.3.2	L'observabilité	80
4.2	Sur la commandabilité/observabilité des équations de Saint-Venant	81
4.2.1	Commandabilité et observabilité à partir de la solution C^1 semi-globale	82
4.2.2	Commandabilité et observabilité : approche Hamiltonienne à ports	87
4.2.2.1	Généralités	87
4.2.2.2	Modèles Hamiltoniens et linéarisation	88
4.2.2.3	Résultats de commandabilité	90
4.3	Le cas de la méthode de Boltzmann sur réseau	93
4.3.1	Un modèle de grande taille	93
4.3.2	Comparaison avec les méthodes classiques	94
4.4	Conclusion	95
5	Aspects algorithmiques du calcul des grammians	97
5.1	Introduction	97
5.2	Les grammians	97
5.2.1	Grammians en dimension finie	98
5.2.2	Grammians en dimension infinie	101
5.2.3	Interprétation énergétique des grammians	102
5.3	Calcul des grammians	104
5.3.1	Calculs classiques	104
5.3.1.1	Les commandes <code>gram</code> et <code>dlyap</code>	104
5.3.1.2	Calcul des grammians avec <code>Yalmip</code>	105
5.3.1.3	Calcul des grammians avec <code>Lyapack</code>	106
5.3.2	Méthodes de point fixe	107
5.3.3	Résultats et comparaisons	108
5.3.3.1	Comparaison des modes de calcul	108
5.3.3.2	Résultats	110
5.4	Conclusion	111
6	Commandabilité uniforme des modèles de Boltzmann sur réseau	113
6.1	Introduction	113
6.2	Généralités	114
6.2.1	Définition de la commandabilité uniforme	114
6.2.2	Les outils pour sa mise en œuvre	114
6.3	Cas des modèles LB	115
6.3.1	Opérateurs discrets et perte de propriétés	116
6.3.2	Opérateurs utilisant l'approche Hamiltonienne	120
6.4	Conclusion	124
	Conclusion générale	125

A Annexes	129
A.1 Le micro-canal	129
A.2 Le développement de Chapman-Enskog	130
Bibliographie	135

Table des figures

1.1	Vues longitudinale (gauche) et latérale (droite) d'un canal ouvert . . .	9
1.2	Éléments géométriques pour différentes sections de canaux, Graf and Altinakar (2000).	10
1.3	Vanne noyée	11
1.4	Déversoir	12
1.5	Jonction de type "Y"	12
1.6	Phases de collision et de propagation	16
1.7	Les vitesses d'un réseau $D2Q9$	17
1.8	Conditions limites bounce-back, réseau $D1Q3$	21
1.9	Conditions limites périodiques, réseau $D1Q3$	21
1.10	Conditions limites réflexives, réseau $D1Q3$	22
1.11	Conditions limites macroscopiques, réseau $D2Q9$	22
1.12	Conditions limites macroscopiques, réseau $D1Q3$	23
2.1	Modèle $D1Q3$	26
2.2	Schéma d'interconnexion	35
2.3	Les vitesses d'un réseau $D2Q9$	37
2.4	Conditions de bords bounce-back à gauche et bord glissant (bounce-forward) à droite	37
2.5	Résumé des conditions de bord bounce-forward.	38
2.6	Interconnexion $1D - 2D$ avec des domaines adjacents. N_{xdD} est le nombre de sites suivant l'axe \overrightarrow{Ox} de la partie dD ($d \in \{1, 2\}$).	39
2.7	Interconnexion $1D - 2D$ avec des domaines se chevauchant. N_{xdD} est le nombre de sites suivant l'axe \overrightarrow{Ox} de la partie dD ($d \in \{1, 2\}$).	39
2.8	Résultat interconnexion $1D-2D$, domaines adjacents	41
2.9	Résultat interconnexion $1D - 2D$, domaines adjacents	41
2.10	Résultat interconnexion $1D - 2D$, domaines adjacents de v.T. Pham (2009).	42
2.11	Résultat interconnexion $1D - 2D$, domaines se chevauchant	42
2.12	Schéma de discrétisation par Preissmann	44
2.13	Système bief et conditions aux frontières	46
2.14	Méthode des volumes finis.	47
2.15	État initial du système, hauteur d'eau (haut) et débit (bas).	50
2.16	Précision des différentes méthodes	51
2.17	Temps de calcul machine	52
2.18	Régions de stabilité de la méthode LB (lignes) et de la méthode de volumes finis (+). La condition CFL est présentée en pointillé.	52

3.1	Phénomène de sédimentation, 3 régions	59
3.2	Phénomène de sédimentation, 2 régions.	61
3.3	Évaluation des profils stationnaires des modèles <i>FV</i> et <i>2swe 1D</i>	65
3.4	Les profils obtenus avec le modèle <i>FV</i> pour une discrétisation sur 400 sites pour différents temps, Cordier et al. (2011)	66
3.5	Les profils obtenus avec le modèle 2 – <i>swe 1D</i> avec le modèle (3.21)-(3.23).	67
3.6	Les profils obtenus avec le modèle LB (<i>2swe 1D</i>) pour une discrétisation sur 400 sites pour différents temps.	67
3.7	Temps de calcul nécessaire pour atteindre l'état stationnaire en fonction du nombre de sites.	67
3.8	Résultats de simulation du scénario 1 pour différents A_g	68
3.9	Résultats de simulation du scénario 2 pour différents A_g	69
3.10	État initial Rupture de barrage	70
3.11	Profils obtenus avec la méthode des volumes finis	70
3.12	Réseau <i>D1Q3</i> asymétrique avec $v_0 = v$, $v_1 = 3v$ et $v_2 = -v$	71
3.13	Simulation transport de sédiments avec le modèle LB <i>1D</i> asymétrique.	72
4.1	Résultat de la commandabilité.	95
4.2	Comparaison de la commandabilité.	96
5.1	Résidu sur la résolution des équations $N \leq 30$	108
5.2	Résidu sur la résolution des équations pour $30 \leq N \leq 200$	109
5.3	Résidu sur la résolution des équations pour $200 \leq N \leq 500$	109
5.4	Canal avec un bief	110
5.5	Variation des énergies dans le système.	111
6.1	Bief discrétisé avec des entrées (rouge), et des sorties (mesures en bleu).	118
6.2	État initial du canal, réponse libre.	118
6.3	Résultat de non commandabilité uniforme.	119
6.4	Résultat de non observabilité uniforme.	119
6.5	Résultat de la commandabilité uniforme avec une commande en variables de scattering	123
A.1	Schéma longitudinal du micro-canal	130
A.2	Photo du micro-canal	131

Notations

\mathcal{A}	: un automate cellulaire (associé à un quadruplet)
\mathcal{T}	: un réseau ou domaine
\mathcal{S}	: espace d'état d'un réseau cellulaire
V	: voisinage
c_i	: cellules
q	: taille du voisinage
f	: fonction de transition
n_i	: nombre de particules se déplaçant dans la direction i
f_i	: distribution ou densité de particules selon la direction i
Ω_i	: terme de collision selon la direction i
δt	: le pas de temps
δx	: le pas spatial
v_i	: vitesse du réseau selon la direction i
r	: position (pourra être complété des indices, r_i en $1D$, r_{ij} en $2D$)
$DdQq$: réseau à d dimension(s) et q vitesses
BGK	: pour Bhatnagar-Gross-Krook
w_i	: pondération selon la direction i
τ	: temps de relaxation
Φ	: semi-groupe
\mathbb{R}	: ensemble des nombres réels
\mathbb{N}	: ensemble des entiers naturels
\mathbb{C}	: ensemble des nombres complexes
$\text{rang}(A)$: rang de l'opérateur ou de la matrice A

Introduction

Les systèmes à paramètres distribués sont des systèmes permettant la description de phénomènes spatio-temporels. Ces systèmes sont souvent représentés par des équations aux dérivées partielles, complétées par la définition des conditions initiales et aux limites du domaine considéré. La modélisation et la commande de ces systèmes est un domaine de recherche en évolution constante depuis des décennies. Cela est motivé par plusieurs applications parmi lesquelles les écoulements de fluides à surface libre en eaux peu profondes et les phénomènes de sédimentation et de transport de solides dans ces écoulements. La complexité croissante des systèmes considérés pour ces applications (interconnection, définition multi-échelle) complique considérablement la résolution numérique des équations. En particulier, dans le cas des écoulements en eaux peu profondes, d'autres approches ont émergé : les automates cellulaires et leurs variantes. La méthode de Boltzmann sur réseau, que nous abrègerons par la méthode LB, qui généralise les automates cellulaires, permet de produire des modèles macroscopiques efficaces à partir d'une description mésoscopique simple de la dynamique. Ces modèles peuvent prendre en compte des géométries complexes aux frontières mobiles et reproduire toute la gamme de comportements dynamiques associés aux phénomènes non linéaires, [Chopard and Droz \(2005\)](#). Il s'agit donc d'une méthode pertinente de modélisation susceptible de concurrencer la classique formulation des modèles d'état à paramètres distribués sous formes d'équations aux dérivées partielles.

Le LCIS travaille depuis plusieurs années sur les problèmes de l'automatique des systèmes à paramètres distribués et en particulier sur la modélisation, la réduction et la commande des systèmes hydrauliques à surface libre (canaux, rivières, ...). Le laboratoire dispose notamment d'un micro-canal expérimental et collabore avec l'Université de Genève et l'Université de Perpignan. Cette collaboration a notamment conduit au développement des modèles LB pour les écoulements $1D$ pour représenter l'hydrodynamique des sections longues d'écoulement, et en $2D$ pour représenter des phénomènes locaux (érosion, sédimentation, turbulences autour des ouvrages hydrauliques, etc.). Cette collaboration a permis de montrer, entre autres, que la méthode LB est une alternative intéressante à l'utilisation du modèle de Saint-Venant traditionnel dans ce domaine, [Marcou et al. \(2010\)](#), [Pham et al. \(2010\)](#). Le travail de thèse qui est présenté dans ce mémoire s'inscrit dans la continuité de ces différentes collaborations. Une attention particulière est portée sur la modélisation sous forme d'état et sur une analyse des propriétés de commandabilité et/ou d'observabilité de cette représentation.

Dans cette thèse qui est présentée sous forme de six chapitres, on s'intéresse à **la modélisation et l'analyse des systèmes non linéaires à paramètres distribués par la méthode de Boltzmann sur réseau, avec comme application**

les canaux d'irrigation.

Dans la première partie, après un état de l'art sur la méthode de Boltzmann sur réseau et sur les canaux d'irrigation, nous proposons une modélisation sous forme d'état équivalente, d'un point de vue implémentation et simulation, aux équations de la méthode LB. Pour cette modélisation, une prise en compte complète des entrées (commandes) et des sorties (mesures) est faite. Le modèle LB ainsi défini vérifie le formalisme semi-groupe (et se rapproche de la définition faite avec les automates cellulaires additifs, [Ammor ep. El Attar \(2004\)](#)) qui s'avère parfois nécessaire pour l'analyse des modèles dans le cas des systèmes à paramètres distribués. Dans cette première partie, nous proposons également un modèle LB ($2 - swe \ 1D$) modélisant la prise en compte des phénomènes de sédimentation en plus de l'écoulement du fluide. Cette modélisation en une dimension ($1D$) a l'avantage d'être moins gourmande en temps de calcul et plus facile à mettre en œuvre que la modélisation proposée par exemple dans [Marcou \(2009\)](#). Ce modèle $2 - swe \ 1D$ est validé numériquement aux travers de certaines expériences.

Dans la deuxième partie, nous proposons une analyse des modèles LB. Cette analyse porte sur les propriétés de commandabilité et d'observabilité. Elle montre que la méthode de Boltzmann sur réseau ne garantit pas les propriétés de commandabilité et d'observabilité du système réduit au delà d'une certaine réduction, c'est à dire à partir d'un certain nombre de points de discrétisation. Cependant, notre analyse met également en évidence le même problème pour que les modèles obtenus avec les méthodes «classiques» de discrétisation. Nous terminons alors par une formulation énergétique qui permet de construire un modèle LB uniformément commandable.

De manière plus détaillée, le mémoire se présente comme suit :

Dans le premier chapitre, on introduit les deux principaux concepts abordés dans le cadre de ce travail : les canaux d'irrigation, comme système d'application, et la méthode de Boltzmann sur réseau. On commence par introduire les canaux d'irrigation en présentant les équations couramment utilisées pour leur modélisation, puis nous présentons divers travaux avec différentes modélisations permettant une résolution numérique plus aisée des équations modélisant les écoulements en eaux peu profondes. On définit également les variables caractéristiques, les types d'écoulement, et discuterons brièvement sur la gestion de ces canaux. La présentation de la méthode LB est ensuite faite en rappelant son historique et ses origines. Puis en se plaçant dans le cadre spécifique des écoulements en eaux peu profondes, nous définissons les différentes variables, les dynamiques et le traitement des conditions aux bords pour cette méthode.

Dans le deuxième chapitre, la modélisation des canaux d'irrigation avec la méthode LB est présentée. On insiste principalement sur la modélisation sous forme de représentation d'état et sur la modélisation multi-échelle. Un rappel sur la modélisation des écoulements en eaux peu profondes avec les méthodes de discrétisation considérées «classiques» est fait. On y présente notamment la méthode des différences finies (un schéma de Preissmann implicite), la méthode des volumes finis et une méthode des résidus pondérés (méthode de collocation par point). On termine le chapitre en comparant ces méthodes avec la méthode LB d'un point de vue stabilité numérique, précision et temps de calcul numérique.

Le troisième chapitre traite du phénomène de sédimentation dans les canaux d'irrigation. On y présente la modélisation du phénomène avec les équations de Saint-

Venant-Exner qui sont généralement utilisées, mais aussi en utilisant des modèles à plusieurs lois qui facilitent la résolution numérique. Les modèles représentant le phénomène de sédimentation avec la méthode LB en $2D$ sont présentés et un modèle $1D$ basé sur l'utilisation de deux modèles LB d'écoulement en eaux peu profondes est présenté ($2-swe-1D$). Le chapitre finit par une validation numérique de ce modèle $1D$ en le comparant avec une méthode de type volumes finis basée sur l'utilisation d'une matrice de Roe.

Le quatrième chapitre présente des résultats sur la commandabilité et l'observabilité des écoulements en eaux peu profondes. Il s'agit des résultats en dimension finie et en dimension infinie. Certains de ces résultats reposent sur l'utilisation d'une solution semi-globale C^1 , Alinhac (1994-1995), T.-T. Li (Da-qian Li) and Kong (1999), T.-T. Li et al. (2001). Les autres résultats se basent sur un formalisme Hamiltonien à ports, Villegas (2007). Le cas de la méthode LB est présenté. Un premier résultat sur la commandabilité des modèles LB est donné, et une comparaison est faite avec les modèles obtenus par les méthodes de discrétisation classiques.

Le cinquième chapitre traite des aspects algorithmiques et du calcul des grammians obtenus à partir des modèles LB sous forme de représentation d'état. Du fait de leur description mésoscopique, les modèles obtenus sont composés de matrices creuses ayant des dimensions élevées, ce qui complique considérablement leur étude analytique et conduit à une étude numérique. Dans ce chapitre, on définit les grammians en dimensions finie et infinie et on fait le lien entre les énergies de commande et/ou d'observation et ces grammians. On présente également des algorithmes pour la détermination des grammians soit par résolution des équations de Lyapunov, soit par utilisation des matrices de commandabilité. Certains de ces algorithmes montrent des difficultés dans la résolution des grammians obtenus dans le cas de la méthode LB. Des comparaisons sont faites sur ces différents algorithmes en calculant les grammians et le choix de l'utilisation d'un algorithme basé sur une itération de point fixe est justifié.

Le sixième chapitre traite de la commandabilité uniforme des modèles de Boltzmann sur réseau. On y définit le concept et différents outils associés. Basé sur la perte de commandabilité observée dans l'utilisation des variables habituelles pour la commande (débit et hauteur), nous présentons une modélisation linéaire et utilisons les variables d'ondes pour conserver la commandabilité lors de la discrétisation avec la méthode de Boltzmann sur réseau. Le chapitre est clos avec une étude d'un exemple de situation.

Après ces six chapitres, une conclusion générale du travail est proposée. On rappelle les principaux résultats présentés dans ce rapport, ainsi que des discussions sur des idées proposées qui n'ont pas abouti. Des ouvertures sur des travaux, ainsi que des perspectives sur ce travail sont également proposées.

Première partie

Modélisation des canaux d'irrigation et méthode de Boltzmann sur réseau

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Les canaux d'irrigation

1.1.1 Introduction

L'eau, bien que ressource renouvelable, nécessite aujourd'hui une gestion attentive de la part de l'homme. Son utilisation, dans la consommation domestique, l'industrie ou pour les besoins d'irrigation, fait l'objet d'une compétition entre ses différents utilisateurs. En particulier, l'irrigation représente 80% de la consommation en eau dans le monde, [Georges and Litrico \(2002\)](#), et se fait généralement en utilisant des canaux pour acheminer l'eau vers ses utilisateurs finaux (agriculteurs notamment), [Graf and Altinakar \(2000\)](#), [Georges and Litrico \(2002\)](#), [Dulhoste \(2001\)](#), [Malaterre \(2003\)](#).

Un canal d'irrigation peut se définir, [Graf and Altinakar \(2000\)](#), comme un système hydraulique de transport dans lequel l'eau s'écoule. Il sera dit à surface libre, si la surface de l'eau est soumise à la pression atmosphérique. On distingue deux types de canaux : les canaux naturels et les canaux artificiels. Par canaux naturels, on entend les cours d'eau naturels, tels que les rivières, les fleuves, etc. Les canaux artificiels désignent quant à eux les cours d'eau réalisés par l'homme, parmi lesquels on distingue les canaux ouverts ou à surface libre (canaux d'irrigation, de navigation, de drainage, etc.) et les canaux couverts (tunnels hydrauliques, égouts, etc.), [Graf and Altinakar \(2000\)](#). Nous considérons dans la suite de notre étude les canaux d'irrigation ouverts artificiels, avec des écoulements en eaux peu profondes.

Les canaux d'irrigation ouverts sont le siège d'écoulements en eaux peu profondes et à surface libre. Ces derniers sont souvent représentés par les équations de Saint-Venant, introduites en 1871 par Adhémar Barré de Saint-Venant, [Barré de Saint-Venant \(1871\)](#) et données par

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \quad (1.1)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = gh(I - J), \quad (1.2)$$

où $h(x, t)$, $u(x, t)$, g , I et J sont des paramètres du canal précisés dans [1.1.2](#). Ces équations sont reconnues comme un modèle de référence. Elles peuvent être dérivées des équations de Navier-Stokes sous certaines hypothèses (hypothèse hydrostatique, hypothèses d'imperméabilité du fond et de surface libre, hypothèse de Boussinesq), et en faisant une moyenne des champs de vitesse sur la verticale, [Graf and Altinakar \(2000\)](#). Elles nécessitent la définition complète des conditions initiales et des

conditions aux limites qui peuvent être externes (limites du domaines considéré, débit en amont, hauteur en aval) et internes (conditions d'interconnexion de bief, des jonctions).

Suivant les buts de la modélisation, on distinguera les modèles de simulation et les modèles de commande. D'après nos connaissances, il est aujourd'hui impossible de déterminer une solution analytique des équations de Saint-Venant pour des canaux réels (sauf sous des hypothèses simplificatrices). Pour des besoins de simulation, on utilisera alors des méthodes numériques (certaines seront présentées dans le Chapitre 2), pour la déterminer. Pour la commande, on distinguera :

- les modèles non-linéaires de dimension finie, [Liu et al. \(1994\)](#), qui utilisent une discrétisation des équations de Saint-Venant ;
- les modèles linéaires de dimension finie parmi lesquelles on notera les modèles sous forme d'espace d'état, [Ouarit \(2004\)](#), les modèles sous forme de fonctions de transfert, [Hamroun \(2009\)](#), [Malaterre \(1994\)](#) ;
- les modèles linéaires de dimension infinie sous forme de fonction de transfert, [Baume and Sau \(1997\)](#), [Baume et al. \(1998\)](#) ;
- également des modèles basés sur les réseaux de neurones, la logique floue et les réseaux de Pétri, [Malaterre and Baume \(1998\)](#), [Malaterre \(2003\)](#).

Dans la suite de ce chapitre, nous présenterons les grandeurs caractéristiques de diverses configurations de canaux d'irrigation, les différents types et régimes d'écoulements qu'on peut y rencontrer et terminerons par quelques considérations sur la gestion des canaux d'irrigation.

1.1.2 Les grandeurs et variables caractéristiques

Nous n'allons pas dans ce document présenter toutes les variables caractéristiques des canaux d'irrigation. Nous estimons que cela est assez bien fait dans les références actuelles, notamment [Graf and Altinakar \(2000\)](#), [Georges and Litrico \(2002\)](#). Nous nous contenterons de présenter simplement les éléments que nous avons fréquemment utilisés. Pour cela, il est d'usage de présenter le canal sous deux vues, une transversale et une longitudinale, voir Fig. 1.1. Ainsi on a pour la vue transversale, qui correspond en fait à la section du canal :

1. la section mouillée, S , correspond à la portion de section occupée par le liquide ;
2. la largeur (superficielle), B , du canal à la surface libre ;
3. la profondeur, h , correspond à la mesure maximale entre le fond et la surface libre ;
4. le périmètre mouillé, P , correspond à la ligne de contact entre l'eau et les berges (fond y compris) ;
5. le rayon hydraulique, R_h , correspond au rapport entre la section mouillée et le périmètre mouillé, soit

$$R_h = \frac{S}{P}; \quad (1.3)$$

6. la profondeur hydraulique, D_h , correspond au rapport entre la section mouillée et la largeur du canal, soit

$$D_h = \frac{S}{B}. \quad (1.4)$$

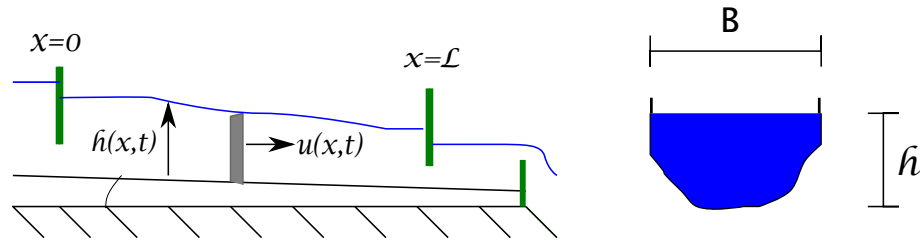


FIGURE 1.1 – Vues longitudinale (gauche) et latérale (droite) d'un canal ouvert

Pour la vue longitudinale, voir Fig. 1.1, on a :

1. la vitesse d'écoulement, $u(x, t)$, qui représente dans le cas des écoulements en eaux peu profondes la vitesse moyenne de l'eau à la section considérée ;
2. le débit, Q , représente le volume d'eau passant dans une section par unité de temps ;
3. la pente de fond, I , correspond à l'inclinaison du fond, et est souvent prise comme

$$I = -\partial_x h_b \quad \text{ou} \quad I = \tan \alpha, \quad (1.5)$$

où h_b et α sont, respectivement, la hauteur et l'inclinaison du fond.

En plus de ces termes, il est fréquent d'intégrer des termes de frottement et de rugosité. Cela peut se faire de diverses manières, dans le cadre de cette étude, nous utiliserons essentiellement la formulation dite de Manning-Strickler présentée en (1.31). Un résumé, pour diverses configurations, des variables caractéristiques est présenté sur Fig. 1.2.

1.1.3 Classification des écoulements

Les écoulements sont classés selon leurs types (liés aux variations spatiale et temporelle) et selon les régimes auxquels ils peuvent être soumis, [Graf and Altinakar \(2000\)](#), [Marcou \(2009\)](#). On distinguera ainsi pour les **types d'écoulements** :

1. suivant la variation dans le temps de certaines variables caractéristiques. On parlera d'écoulements permanent ou non permanent. Il sera dit permanent si la vitesse u , la profondeur h ou D_h sont invariables dans le temps. Il sera dit non permanent si ces paramètres varient dans le temps. On notera cependant qu'au sens strict ou d'un point de vue pratique, il n'existe pas d'écoulements permanents, mais nous pouvons tout de même considérer, du moins sur de courts laps de temps, les écoulements comme étant permanents (cela peut aussi être le cas dans un but de simplification, voir [Bennis \(2007\)](#)) ;
2. suivant la variation dans l'espace des variables caractéristiques. On parlera d'écoulements uniforme ou non uniforme. L'écoulement sera dit uniforme lorsque la vitesse u et la profondeur h ou D_h sont constantes le long du canal. Cela peut impliquer, ou nécessiter, que d'autres variables caractéristiques restent constantes (pente, largeur, ...). Il sera dit non uniforme dans le cas contraire. On notera là également, qu'un écoulement uniforme est un cas idéal, considéré lorsque l'écoulement est graduellement varié, mais qu'il reste rare en pratique.

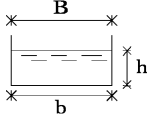
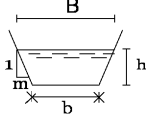
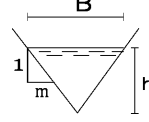
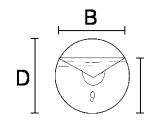
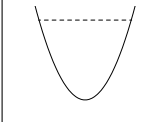
					
	Rectangle	Trapèze	Triangle	Cercle	Parabole
Surface S	bh	$(b + mh)h$	mh^2	$\frac{1}{8}(\theta - \sin\theta)D^2$	$\frac{2}{3}Bh$
Périmètre mouillé P	$b + 2h$	$b + 2h\sqrt{1 + m^2}$	$2h\sqrt{1 + m^2}$	$\frac{1}{2}\theta D$	$B + \frac{8h^2}{3B}^*$
Rayon hydraulique R_h	$\frac{bh}{b + 2h}$	$\frac{(b + mh)h}{b + 2h\sqrt{1 + m^2}}$	$\frac{mh}{2\sqrt{1 + m^2}}$	$\frac{1}{4} \left[1 - \frac{\sin\theta}{\theta} \right]$	$\frac{2B^2h}{3B^2 + 8h^2}^*$
Largeur B	b	$b + 2mh$	$2mh$	$\frac{(\sin\theta/2)D}{2\sqrt{h(D - h)}}$ ou $\frac{(\sin\theta/2)D}{2\sqrt{h(D - h)}}$	$\frac{3S}{2h}$
Profondeur hydraulique D_h	h	$\frac{(b + mh)h}{b + 2mh}$	$\frac{h}{2}$	$\left[\frac{\theta - \sin\theta}{\sin\theta/2} \right] \frac{D}{8}$	$\frac{2h}{3}$

FIGURE 1.2 – Éléments géométriques pour différentes sections de canaux, [Graf and Altinakar \(2000\)](#).

Il est possible d'avoir des combinaisons de ces différents écoulements (notamment en régime fluvial, présenté plus loin) intégrant des variations spatiale et temporelle. On peut ainsi avoir :

écoulement permanent $\begin{cases} \text{uniforme} \\ \text{non uniforme} \end{cases}$

écoulement non permanent $\begin{cases} \text{uniforme (rare)} \\ \text{non uniforme.} \end{cases}$

Les **régimes d'écoulements** sont classés selon deux nombres adimensionnels qui dépendent des forces agissant sur le système (forces de gravité, d'inertie et de frottement). Ces nombres sont :

- le nombre de Froude F_r , donné par :

$$F_r = \frac{u}{\sqrt{gD_h}}; \quad (1.6)$$

- le nombre de Reynolds Re , donné par :

$$Re = \frac{R_h u}{\nu}, \quad (1.7)$$

où ν est la viscosité cinématique du fluide.

Le nombre de Froude permet de classer les écoulements comme suit :

- écoulement fluvial, pour $F_r < 1$;
- écoulement torrentiel, pour $F_r > 1$;
- écoulement critique, pour $F_r = 1$.

Le nombre de Reynolds, quant à lui, permet le classement suivant :

- écoulement laminaire, pour $Re < 500$;
- écoulement turbulent, pour $Re > 2000$;
- une phase de transition, pour $500 < Re < 2000$.

Une combinaison des deux nombres, permet d'avoir quatres régimes d'écoulements :

- fluvial-laminaire, pour $F_r < 1$ et $Re < 500$;
- fluvial-turbulent, pour $F_r < 1$ et $Re > 2000$;
- torrentiel-laminaire, pour $F_r > 1$ et $Re < 500$;
- torrentiel-turbulent, pour $F_r > 1$ et $Re > 2000$.

1.1.4 La gestion des canaux d'irrigation

La gestion des canaux d'irrigation se fait via des ouvrages hydrauliques et des politiques bien définies. Ces ouvrages hydrauliques servent d'ouvrages d'interconnexion entre les biefs, mais aussi à la mesure ou aux contrôles des grandeurs caractéristiques. Nous allons présenter dans la suite ces ouvrages, mais aussi les politiques de contrôle des canaux.

1.1.4.1 Les ouvrages de connexion et/ou de contrôle/mesure

Parmi les ouvrages de connexion et/ou de contrôle/mesure, nous avons les ouvrages hydrauliques classiques (vannes, déversoirs), mais aussi des ouvrages de ramification tels que les jonctions en "T" ou en "Y". Ces différents ouvrages peuvent être modélisés par des équations mathématiques, pouvant intégrer l'état, la variation de l'ouvrage ou de ses grandeurs caractéristiques. Nous avons ainsi :

1. **les vannes** : elles sont utilisées pour réguler le débit ou les hauteurs du canal. Le débit dans un tel ouvrage peut s'écrire

$$Q = \alpha B \theta \sqrt{2g(h_1 - h_2)}, \quad (1.8)$$

où α est le coefficient de vanne, B est la largeur de la vanne, h_1 et h_2 sont respectivement les hauteurs d'eau en amont et en aval de la vanne, g est l'accélération gravitationnelle et θ est l'ouverture de la vanne. Cette formulation correspond à un régime noyé de la vanne, une formulation de type dénoyé (l'aval n'influence pas le débit) existe et peut être consulté dans [Georges and Litrico \(2002\)](#), [Marcou \(2009\)](#) ;

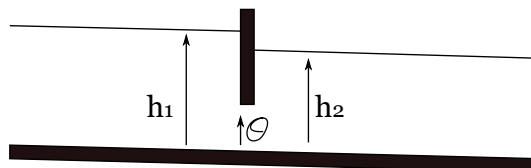


FIGURE 1.3 – Vanne noyée

2. **les déversoirs** : ils peuvent être considérés comme des seuils à atteindre avant d'avoir un écoulement vers l'aval du canal et garantissent ainsi une hauteur d'eau minimale en amont quelque soit la vitesse d'écoulement dans le canal. Le débit à travers un déversoir noyé peut s'écrire comme suit

$$Q = \alpha_d B h_1 \sqrt{2gh_1}, \quad (1.9)$$

avec α_d le coefficient du déversoir, B_d la largeur du déversoir, h_1 la hauteur d'eau au dessus du déversoir et g l'accélération gravitationnelle. Là également, il s'agit d'un régime noyé, on peut aussi l'exprimer en régime dénoyé, voir [Georges and Litrico \(2002\)](#), [Marcou \(2009\)](#);

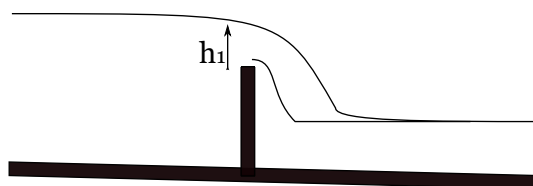


FIGURE 1.4 – Déversoir

3. **jonction "Y"** : ce type d'ouvrage se rencontre lors d'interconnexion de biefs. Il peut s'agir de biefs qui se divisent ou de plusieurs biefs qui se rejoignent, voir Fig. 1.5. Cela se traduit mathématiquement, en l'absence de pertes de charge, par les équations suivantes :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad (1.10)$$

$$h_1 = h_2 = h_3, \quad (1.11)$$

où Q_i et h_i représentent, respectivement, le débit et la hauteur d'eau du bief numéro i .

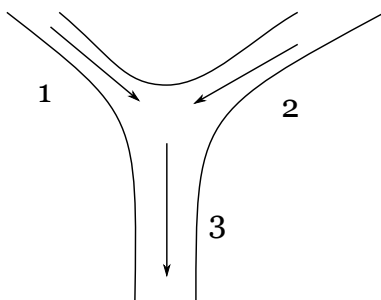


FIGURE 1.5 – Jonction de type "Y"

1.1.4.2 Les politiques de contrôle

La politique, ou logique, de contrôle définit les types de commandes ainsi que les directions de celle-ci. Dans [Georges and Litrico \(2002\)](#), [Marcou \(2009\)](#), on trouvera que les commandes applicables dans le cas des canaux d'irrigation consistent en des commandes de type boucle ouverte et/ou boucle fermée, alors que les directions de commande seront soit de type aval, soit de type amont.

La commande en boucle fermée se fait en utilisant une boucle de retour synthétisée sur l'erreur de sortie (différence entre la consigne et la sortie) et permet ainsi d'intégrer de probables perturbations. C'est une commande assez utilisée en Automatique qui permet d'atteindre la consigne plus facilement. Cependant dans des systèmes avec des retards (c'est le cas dans les canaux d'irrigation, notamment à cause de la durée d'écoulement entre un ouvrage et un autre), ce type de commande n'est pas toujours satisfaisant. La commande peut être améliorée par l'ajout d'une commande de type boucle ouverte.

La commande par l'aval ou l'amont consistent à utiliser l'ouvrage hydraulique (vanne ou déversoir) dans le but de contrôler une variable située, respectivement, à l'aval ou à l'amont du dit ouvrage. Toutes les variables peuvent être contrôlées par l'aval, alors que pour la commande par l'amont, on ne peut contrôler que les hauteurs et les volumes, [Georges and Litrico \(2002\)](#).

1.2 La méthode de Boltzmann sur réseau

La méthode de Boltzmann sur réseau consiste à modéliser un comportement macroscopique global à partir d'une description mésoscopique simple des particules en interaction à l'échelle locale. Elle intègre des dynamiques spatiale et temporelle et se base sur une approche discrète. C'est une méthode qui généralise les automates cellulaires. Ces derniers sont reconnus pour modéliser des systèmes à paramètres distribués et ont été utilisés pour diverses applications : l'hydrodynamique, [Wolfram \(1986\)](#), l'épidémiologie, [Ostfeld et al. \(2005\)](#), [Slimi et al. \(2009\)](#), la dynamique spatiale des populations et des écosystèmes, [Chopard and Lagrava \(2006\)](#), [Hencinas et al. \(2007\)](#), les applications bio-médicales, [Ouared et al. \(2006\)](#), [Chopard et al. \(2010\)](#). Dans ces applications, les exemples avec espace d'état discret sont adaptés, cependant, dans des systèmes régis par des lois de conservation des variables macroscopiques (en thermodynamique ou en hydraulique), des espaces d'état continus semblent plus appropriés. Pour cette raison la méthode LB est donc considérée comme une extension convenable des automates cellulaires : et permettent par ailleurs de représenter divers type de modèles physiques, [Chopard and Droz \(2005\)](#).

La méthode LB peut également être vue comme une méthode développée à partir de l'équation de Boltzmann de la théorie cinétique des gaz. Dans [He and Luo \(1997a,b\)](#), X. He et L.-S. Luo montrent en effet que la méthode de Boltzmann sur réseau est une forme discrétisée de l'équation de Boltzmann. X. Shan et al., quant à eux, font une représentation des systèmes hydrodynamiques à partir de la discrétisation de l'équation cinétique de Boltzmann, [Shan et al. \(2006\)](#).

Et indépendamment de la méthode dont elle dérive (approche automates cellulaires ou discrétisation à partir de l'équation cinétique de Boltzmann), plusieurs travaux présentent la convergence de la méthode LB vers les solutions des équations de Navier-Stokes en utilisant le développement de Chapman-Enskog, [Chapman and Cooling \(1939\)](#), [Diu et al. \(1989\)](#).

La méthode LB est aujourd'hui connue comme un outil puissant permettant la modélisation, la simulation et la résolution numérique des systèmes à paramètres distribués dans divers domaines et pour diverses applications. Parmi ces domaines, celui des fluides a largement été étudié, [Zhou \(2004a\)](#), [Salmon \(1999\)](#), et fera l'objet de notre attention, notamment pour ce qui est des écoulements en eaux peu

profondes.

Nous allons dans la suite, présenter les méthodes dont dérive la méthode de Boltzmann sur réseau¹, ensuite définir les variables qui la caractérisent, les dynamiques, ainsi que le traitement des conditions aux limites. Nous nous focaliserons principalement sur le cas des écoulements en eaux peu profondes.

1.2.1 Historique et origines

Historiquement, les automates cellulaires ont été introduits par von Neuman et Ulam en 1966, von Neuman (1966). Récemment, leur utilisation a été étendue aux modèles des systèmes à paramètres distribués, Chopard and Lagrava (2006), Chopard et al. (2010), Hencinas et al. (2007), Ostfeld et al. (2005), Ouared et al. (2006), Slimi et al. (2009), pour divers type d'applications. Une première méthode de type automates cellulaires pour la modélisation des écoulements a été établie avec la méthode des gaz sur réseau, Chopard et al. (2010), Frisch et al. (1986), McNamara and Zanetti (1988), Rothman and Zaleski (1997). Dans les automates cellulaires, les espaces d'état utilisés sont discrets. Ce qui n'est pas adapté dans le cas des systèmes à paramètres distribués basés sur les lois de conservation des variables macroscopiques (par exemple la masse et la quantité de mouvement en hydraulique). La méthode de Boltzmann sur réseau apporte donc une amélioration en considérant des valeurs réelles continues.

Dans la suite, nous donnons un bref descriptif des méthodes d'automates cellulaires et de gaz sur réseau, considérées comme génératrices de la méthode de Boltzmann sur réseau.

1.2.1.1 Les automates cellulaires

On pourra trouver dans Chopard and Droz (2005), Ammor ep. El Attar (2004), Marcou (2009), El Yacoubi (2008), Slimi et al. (2009), Wolfram (1986) diverses définitions des automates cellulaires, elles se ramènent essentiellement à deux définitions, une formelle et l'autre informelle.

1. **De manière informelle** : un automate cellulaire peut être défini par deux types de caractéristiques : structurelles et fonctionnelles. On distingue deux caractéristiques structurelles :
 - l'aspect topologique du réseau cellulaire (1D, 2D, hexagonal, carré, ...);
 - la définition du voisinage (Von-Neumann, Moore dans le cas 2D par exemple).On compte également deux caractéristiques fonctionnelles :
 - l'espace d'état (ensemble des états que peut prendre une cellule);
 - la règle de transition de l'état (comment évolue un état et les règles qui définissent cette évolution).
2. **De manière formelle** : un automate cellulaire se définit par le quadruplet $\mathcal{A} = (\mathcal{T}, \mathcal{S}, V, f)$ où
 - \mathcal{T} est un réseau cellulaire qui consiste en un pavage régulier d'un domaine Ω de \mathbf{R}^d , $d = 1, 2$ ou 3 . Chaque élément de \mathcal{T} appelé cellule peut être repéré par le d -uplet (i_1, i_2, \dots, i_d) , d étant la dimension d'espace.

1. On considère uniquement les méthodes de type automates cellulaires et de gaz sur réseau, notamment à cause des formalismes qu'elles présentent, El Yacoubi (2008), Ammor ep. El Attar (2004) et qui seront utilisés dans cette étude.

- \mathcal{S} désigne l'ensemble d'état qui est un ensemble fini de valeurs qui représentent tous les états susceptibles d'être pris par chaque cellule.
- V est une fonction qui définit le voisinage d'une cellule c définie par

$$\begin{aligned} V : \mathcal{T} &\rightarrow \mathcal{T}^n \\ c &\rightarrow V(c) = (c_1, c_2, \dots, c_n) \end{aligned} \quad (1.12)$$

où les cellules c_i pour $i = 1, \dots, n$ sont liées à c par une relation de proximité, contiguïté, influence, etc, n étant la taille du voisinage $V(c)$.

- f est une fonction de transition qui permet de calculer l'état d'une cellule à l'instant $t + 1$ en fonction de son voisinage à l'instant t . Elle peut être définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{S}^n &\rightarrow \mathcal{S} \\ s_t(V(c)) &\rightarrow s_{t+1}(c) = f(s_t(V(c))) \end{aligned} \quad (1.13)$$

où $s_t(c)$ désigne l'état de la cellule c à l'instant t et $s_t(V(c)) = \{s_t(c'), c' \in V(c)\}$ est l'état du voisinage.

1.2.1.2 La méthode des Gaz sur réseau

Cette méthode modélise l'interaction entre des particules entrant dans un même site à un instant donné et leur redistribution (via un terme de collision) selon différentes directions du réseau (phase de collision, qui peut être vue à l'échelle macroscopique comme une phase de convection). La phase de collision est suivie d'une phase de propagation vers les sites voisins (qui peut être vue au niveau macroscopique comme une phase de diffusion). Ces deux phases peuvent être formulées mathématiquement par :

$$\begin{aligned} n_i^{out}(r, t) &= n_i^{in}(r, t) + \Omega_i(n(r, t)) && \text{Collision} \\ n_i^{in}(r + v_i \delta t, t + \delta t) &= n_i^{out}(r, t) && \text{Propagation} \end{aligned} \quad (1.14)$$

où r est la coordonnée spatiale, δt le pas de temps, $n_i^{in}(r, t)$ qui prend une valeur binaire est le nombre de particules entrant au site r au temps t avec la vitesse v_i , $n_i^{out}(r, t)$ est le nombre de particules sortant, [Zhou \(2004a\)](#). Le terme de collision $\Omega_i(n(r, t))$ est une fonction de tous les n_i^{in} qui définit la règle d'interaction entre les particules². Ce terme est déterminé en respectant les lois de conservation de quantité de mouvement et de masse. Des spécificités sur cette méthode pourront être consultées dans [van der Hoef \(1993\)](#), [Chopard and Droz \(2005\)](#), [Rothman and Zaleski \(1997\)](#).

Enfin, deux modèles sont souvent pris en exemple dans le cas de la méthode des gaz sur réseau, il s'agit du modèle HPP, le plus simple des modèles de gaz sur réseau, introduit par Hardy, Pazzis et Pomeau, voir [Hardy and Pomeau \(1972\)](#), [Hardy et al. \(1973a,b, 1976\)](#), et du modèle FHP, introduit un peu plus tard par Frisch, Hasslacher et Pomeau, voir [Frisch et al. \(1986, 1987\)](#). La topologie de cette méthode peut se ramener à une formule $DdQq$, où d désigne la dimension du réseau (1, 2 ou 3), et q le nombre de directions de propagations.

2. Le terme $n(r, t)$ est utilisé ici pour indiquer la dépendance du terme de collision vis à vis de toutes les particules suivant les différentes directions

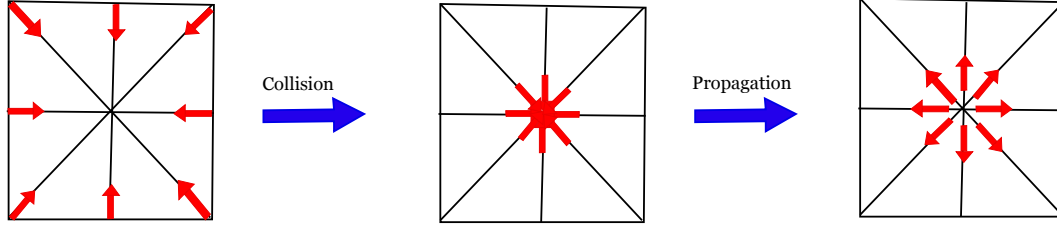


FIGURE 1.6 – Phases de collision et de propagation

1.2.2 Définitions des variables

La méthode de Boltzmann sur réseau est obtenue comme une extension directe de la méthode des gaz sur réseau dans laquelle le nombre de particules n_i est remplacé par des fonctions de distribution f_i à valeurs réelles positives, et également par une modification du terme de collision. Dans la méthode de Boltzmann sur réseau, on pourra aussi intégrer des termes de force. Nous présentons dans la suite diverses variables utilisées dans la méthode LB.

1.2.2.1 Les densités

Les densités, notées f_i représentent les quantités de particules dans le réseau allant vers (ou sortant d') un site dans la direction i . La conséquence immédiate de la suppression des valeurs booléennes (que nous avons dans le cas de la méthode des gaz sur réseau) est pratique : une baisse de bruit, une plus grande précision numérique et, plus important, une plus grande flexibilité pour choisir la topologie du réseau, l'opérateur de collision et les conditions aux bords, voir [Chopard and Droz \(2005\)](#).

Les phases de collision et de propagation, voir Fig. 1.6, peuvent être formulées par :

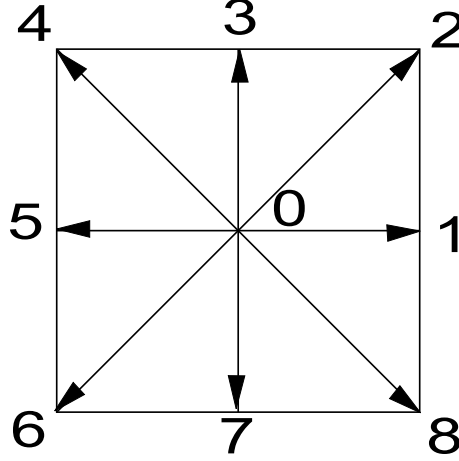
$$f_i^{out}(r, t) = f_i^{in}(r, t) + \Omega_i(f(r, t)) \quad \text{Collision,} \quad (1.15)$$

$$f_i^{in}(r + v_i \delta t, t + \delta t) = f_i^{out}(r, t) \quad \text{Propagation,} \quad (1.16)$$

où les $f_i^{out}(r, t)$ représentent les distributions sortant du site r au temps t en direction i , f_i^{in} ceux qui y rentrent. Ces paramètres sont non-négatifs et continus (contrairement à ceux de la méthode des gaz sur réseau, qui sont booléennes), δt désigne le pas de la discrétisation temporelle, Ω_i est le terme de collision et dépend de toutes les distributions ($f(r, t)$) du site r au temps t , ce terme sera présenté plus en détails un peu plus loin. Enfin v_i représente la vitesse de propagation des particules d'un site à un autre dans la direction i , $i = 0, \dots, z - 1$, où z désigne le nombre de vitesse ($= q$ dans un réseau $DdQq$). Dans des problèmes avec des réseaux $2D$ par exemple le réseau ($D2Q9$) de Fig. 1.7, un choix commun des vitesses est donné par

$$\begin{aligned} v_0 &= (0, 0) & v_1 &= v(1, 0) & v_2 &= v(1, 1) & v_3 &= v(0, 1) & v_4 &= v(-1, 1) \\ v_5 &= v(-1, 0) & v_6 &= v(-1, -1) & v_7 &= v(0, -1) & v_8 &= v(1, -1). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Par ailleurs, les densités doivent vérifier pour chaque site et à chaque pas de temps, les conservations de masse (hauteur, notée h) et de quantité de mouvement

FIGURE 1.7 – Les vitesses d'un réseau $D2Q9$.

(débit unitaire par largeur de section, donnée par hu , où u est la vitesse d'écoulement du fluide) :

$$h(r, t) = \sum_i^z f_i^{in}(r, t) = \sum_i^z f_i^{out}(r, t), \quad (1.18)$$

$$h(r, t)u(r, t) = \sum_i^z v_i f_i^{in}(r, t) = \sum_i^z v_i f_i^{out}(r, t). \quad (1.19)$$

1.2.2.2 Les autres variables

Les autres variables nécessaires à la définition d'un modèle de Boltzmann sur réseau sont le terme de collision, précédemment rencontré, mais aussi les termes de forces.

Pour ce qui est du terme de collision, Ω_i , on notera qu'il existe plusieurs manières d'exprimer ce terme. On pourra les classer comme faisant partie des modèles BGK, pour Bhatnagar-Gross-Krook, [Bhatnagar et al. \(1954\)](#), [Latt \(2007\)](#), [Qian et al. \(1992\)](#), [Succi \(2001\)](#) ou des modèles non-BGK. Parmi les modèles considérés comme non-BGK, nous avons les approches multi-particules avec [McNamara et al., \(1993\)](#), [McNamara et al. \(1995, 1997\)](#).

D'autres modèles non-BGK existent, [Lallemand and Luo \(2000\)](#), [Eggels and Somers \(1995\)](#), [Eggels \(1996\)](#), et des modèles un peu plus sophistiqués, [Chikatamarla et al. \(2006\)](#), [d'Humières et al. \(2002\)](#), [Latt \(2007\)](#). Pour notre étude, nous utiliserons le modèle BGK ayant un seul temps de relaxation τ , qui est largement utilisé et reconnu pour sa stabilité et sa flexibilité dans les propriétés des écoulements en eaux peu profondes. Le terme Ω_i s'écrit dans ce cas comme une relaxation par rapport aux distributions d'équilibre :

$$\Omega_i = \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i) \quad (1.20)$$

où f_i^{eq} est la fonction de distribution d'équilibre local et dépend du phénomène

à modéliser. Dans le cas d'un réseau $D2Q9$, ces fonctions sont données par :

$$f_i^{eq} = \begin{cases} h - \frac{5gh^2}{6v^2} - \frac{2h}{3v^2}u_\alpha u_\alpha, & i = 0 \\ \frac{gh^2}{6v^2} + \frac{h}{3v^2}v_{i\alpha}u_\alpha + \frac{h}{2v^4}v_{i\alpha}v_{i\beta}u_\alpha u_\beta - \frac{h}{6v^2}u_\alpha u_\alpha, & i = 1, 3, 5, 7 \\ \frac{1}{4} \left(\frac{gh^2}{6v^2} + \frac{h}{3v^2}v_{i\alpha}u_\alpha + \frac{h}{2v^4}v_{i\alpha}v_{i\beta}u_\alpha u_\beta - \frac{h}{6v^2}u_\alpha u_\alpha \right), & i = 2, 4, 6, 8, \end{cases} \quad (1.21)$$

où les indices α et β représentent des axes de projection, des explications plus détaillées peuvent être consultées dans [Zhou \(2004a\)](#). Le temps de relaxation τ dépend du coefficient de transport du modèle et correspond à la viscosité dans un modèle de fluide.

Dans les équations de Boltzmann sur réseau, et de manière à tenir compte du modèle, on peut ajouter des termes qui représentent les interactions avec l'extérieur, ou les différentes forces agissant sur le système. Dans le cas des modèles de fluide, on pourra ainsi intégrer des termes³ :

- de **force simple** dans ce cas, la force est évaluée au site actuel et est représentée par une discrétisation des termes de force classiques dans les équations d'écoulements de fluide, [Zhou \(2002\)](#) :

$$F = gh(I - J) \quad (1.22)$$

avec I la pente du canal, J le terme de frottement, g l'accélération gravitationnelle et h la hauteur du fluide⁴ ;

- de **force de Zhou**, introduit par J. G. Zhou, [Zhou \(2004a\)](#), cette force est évaluée entre deux sites voisins. Si F est la force simple en un site donnée en (1.22), la force de Zhou, notée F_i , sera donnée par

$$F_i(r, t) = F(r + \frac{1}{2}v_i\delta t, t); \quad (1.23)$$

- de **force de Guo**, cette force est proposée par Z. Guo dans [Guo et al. \(2002a\)](#), elle considère une écriture modifiée de la quantité de mouvement du système, [Guo et al. \(2002b\)](#), telle que

$$h = \sum_{i=0}^2 f_i \quad (1.24)$$

$$hu = \sum_{i=0}^2 v_i f_i + \frac{\delta t}{2} F \quad (1.25)$$

où F est le terme de force simple. Le terme de force est donné par :

$$F_i = (1 - \frac{1}{2\tau})\omega_i(\frac{v_i - u}{c_s^2} + \frac{v_i^2 u}{c_s^4})F \quad (1.26)$$

où ω_i et c_s sont des paramètres relatifs au réseau, voir [1.2.3.1](#) ;

- de **force de Guo-Chopard**, encore appelée force de Guo simplifiée, est déterminée en considérant un écoulement stationnaire ($u(r, t) = 0$) dans le terme de force de Guo. Le terme de force est alors donné par

$$F_i = (1 - \frac{1}{2\tau})\frac{\omega_i v_i}{c_s^2} F; \quad (1.27)$$

3. On considère un modèle $D1Q3$ par soucis de simplicité et pour une meilleur compréhension.

4. Les paramètres I et J seront détaillés dans [1.2.3](#).

- de **force de EDM** (pour *exact different method*), proposée dans [Kupershtokh \(2004\)](#), cette force consiste à définir les équations de Boltzmann par :

$$f_i(r + v_i \delta t, t + \delta t) = f_i(r, t) + \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i(r, t)) + \Delta f_i, \quad (1.28)$$

où

$$\Delta f_i = f_i^{eq}(h, u + \Delta u) - f_i^{eq}(h, u), \quad \Delta u = \frac{F \delta t}{h} \quad (1.29)$$

et la vitesse réelle du fluide déterminée par

$$h \tilde{u} = \sum_{i=0}^2 v_i f_i + \frac{F \Delta t}{2}. \quad (1.30)$$

1.2.3 Les dynamiques

Comme présenté précédemment, la méthode de Boltzmann sur réseau intègre des dynamiques spatio-temporelles. Elles peuvent être décrites par une dynamique locale ou une dynamique globale.

1.2.3.1 La dynamique locale

La dynamique locale consiste à décrire les phénomènes qui existent au niveau mésoscopique. Il s'agit en fait des phases de collision (1.15) et de propagation (1.16) auxquelles on ajoute les termes de force. Dans le cas d'un écoulement de fluide en eaux peu profondes, ces termes de force dépendent en général de la pente du fond et de la rugosité des berges. Si l'on considère un canal rectangulaire, le terme de force simple, F , est donnée par (1.22) où I est la pente du canal, g est l'accélération gravitationnelle et h est la hauteur d'eau, J représente la rugosité des berges et peut être déterminé par l'équation classique de Manning-Strickler donnée par

$$J = \frac{n_s^2 u^2}{(\frac{Bh}{B+2h})^{(4/3)}}, \quad (1.31)$$

où B est la largeur du canal (supposé constante), n_s est le coefficient de Manning-Strickler et u est la vitesse d'écoulement.

En combinant les équations de collision (1.15) et les équations de propagation (1.16), on peut écrire :

$$f_i(r + v_i \delta t, t + \delta t) = f_i(r, t) + \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i) \quad (1.32)$$

où f_i est mis pour f_i^{in} . Si nous tenons compte du terme de force, nous aurons :

$$f_i(r + v_i \delta t, t + \delta t) = f_i(r, t) + \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i) + \omega_i \frac{\delta t}{c_s^2} v_i F, \quad (1.33)$$

où F est le terme de force, c_s et ω_i sont des paramètres déterminés par la géométrie du réseau de manière que l'on préserve l'isotropie du modèle. Dans le cas d'un réseau

$D2Q9$ par exemple, ces paramètres peuvent être donnés par, [Zhou \(2004a\)](#) :

$$\sum_i \omega_i = 1 \quad (1.34)$$

$$\sum_i v_i \omega_i = 0 \quad (1.35)$$

$$\sum_i v_i^2 \omega_i = c_s^2 \quad (1.36)$$

$$\sum_i v_i^3 \omega_i = 0 \quad (1.37)$$

$$\sum_i v_i^4 \omega_i = 3c_s^4, \quad (1.38)$$

avec $i = 0, \dots, z - 1$ où z est le nombre de vitesses. Des équations supplémentaires peuvent être nécessaires selon la dimension du réseau, [Chopard and Droz \(2005\)](#).

1.2.3.2 La dynamique globale

La dynamique globale est constituée de l'ensemble des dynamiques locales. Cette dynamique, qui semble intuitive, est cependant peu présente dans la littérature. Ceci s'explique notamment par son faible intérêt pour la simulation. Dans ce travail et pour des besoins de l'automatique classique (contrôlabilité, observabilité), une représentation de la dynamique globale s'avère être un outil de premier choix, voir [Anda Ondo et al. \(2011a, 2012\)](#), [Pham et al. \(2010\)](#).

Dans cette étude, des représentations sur cette dynamique seront introduites.

1.2.4 Le traitement aux frontières

Nous rappelons que la méthode de Boltzmann sur réseau reproduit le comportement des systèmes à paramètres distribués. Ainsi nous ne saurions terminer cette section sans dire un mot sur les conditions de bord. La méthode permet d'intégrer une grande variété de conditions aux limites. Nous présenterons uniquement celles utilisées dans le cadre de ce travail et référencerons les autres.

Les conditions de bord dans le cas de la méthode de Boltzmann sur réseau peuvent s'écrire, soit de manière à définir des conditions macroscopiques (hauteur ou débit par exemple), soit de manière propre aux méthodes utilisant des réseau (on parvient tout de même à trouver des interprétations physiques de ces conditions).

1.2.4.1 Conditions limites de type réseau

Les conditions limites de type réseau utilisées dans le cadre de ce travail sont, essentiellement, les conditions de type bounce-back, périodiques et réflexives. Nous les présentons dans la suite.

1. **Bounce-back** : C'est la plus simple, elle consiste, lors de la phase de collision, à donner aux distributions sortantes la valeur des distributions entrantes en direction opposée. Elle peut s'écrire comme

$$f_i^{out} = f_k^{in}, \quad (1.39)$$

où la direction k correspond à la direction opposée à la direction i , voir Fig. 1.7 ou Fig. 1.8 ;

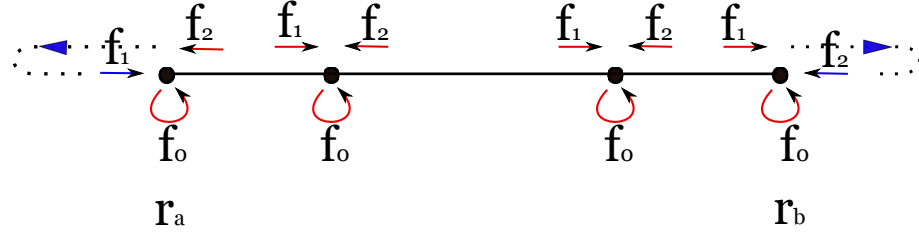


FIGURE 1.8 – Conditions limites bounce-back, réseau $D1Q3$.

2. **Périodiques** : Dans ces conditions, on suppose simplement que les frontières du système se prolongent directement sur les autres frontières du système qui leur sont opposées (sur un réseau 1D, voir Fig. 1.9, on aura un anneau, en 2D, le système peut être vu comme un tore). Mathématiquement cela se traduit par

$$f_i^{in}(r_{\partial|a}, t + \delta t) = f_i^{out}(r_{\partial|b}, t), \quad (1.40)$$

où on suppose que $\partial|a$ et $\partial|b$ sont deux frontières du système directement opposées ;

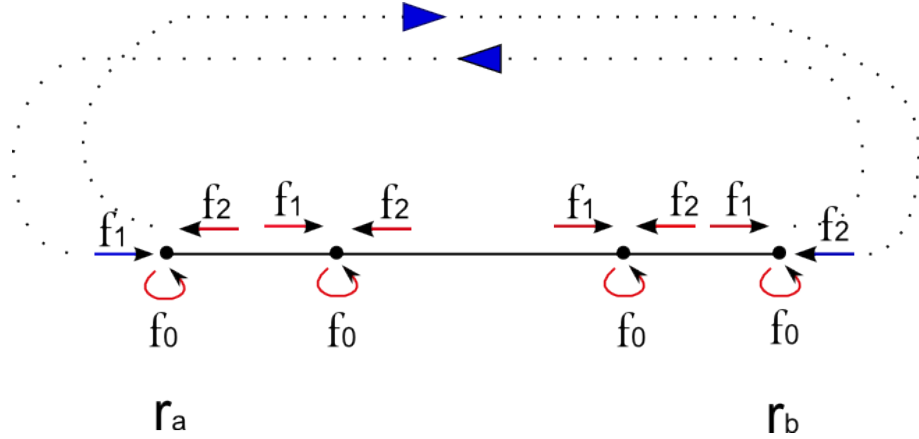
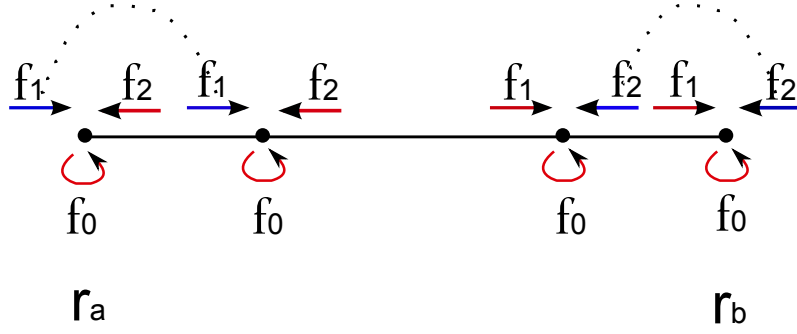


FIGURE 1.9 – Conditions limites périodiques, réseau $D1Q3$.

3. **Réflexives** : Le système est vu aux frontières comme un prolongement des sites aux bords et peut correspondre aux conditions limites macroscopiques à gradients nuls (conditions de type Neumann), voir Fig 1.10. Mathématiquement, cela peut être représenté par

$$f_i^{in}(r_{\partial|a}, t + \delta t) = f_i^{in}(r_{\partial|a} + v_i \delta t, t). \quad (1.41)$$

En plus de ces conditions, des extensions ont été proposées, notamment pour le bounce-back. Il s'agit de la condition de Zou et He, [He and Zou \(1995\)](#), de la condition d'Inamouro, [Inamouro et al. \(1995\)](#). D'autres conditions peuvent être consultées dans [Chen et al. \(1996\)](#), [Maier et al. \(1996\)](#).


 FIGURE 1.10 – Conditions limites réflexives, réseau $D1Q3$.

On notera que ces conditions ne respectent pas toujours la conservation de propriétés macroscopiques aux bords ("vitesse de glissement" générée dans le bounce-back simple, [Marcou \(2009\)](#), non conservation de la masse dans les conditions limites proposées par Zou et He dans [He and Zou \(1995\)](#)). Pour éviter cela, il peut être préférable d'imposer directement les variables désirées.

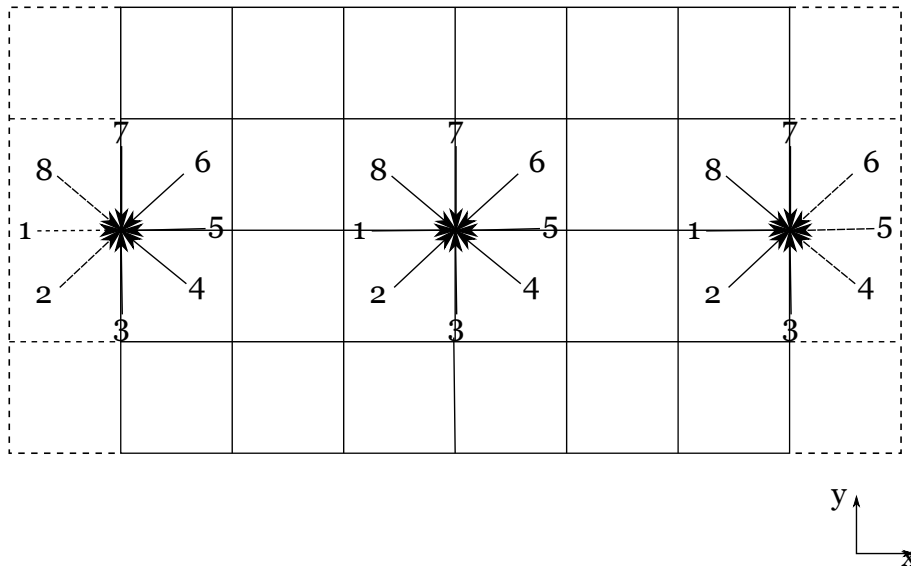
1.2.4.2 Conditions macroscopiques aux limites

Pour les conditions limites permettant d'imposer directement des variables macroscopiques (masse/hauteur ou quantité de mouvement/débit), on utilise les relations (1.18-1.19). On aura ainsi dans le cas d'un réseau 2D, [Zhou \(2004a\)](#), [Zou and He \(1997\)](#), où les distributions inconnues sont f_1 , f_2 et f_8 , voir Fig. 1.11, et la vitesse u se décompose suivant les axes x et y telle que $u = u_x \vec{x} + u_y \vec{y}$:

$$h = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \quad (1.42)$$

$$hu_x = v(f_1 + f_2 + f_8) - v(f_4 + f_5 + f_6) \quad (1.43)$$

$$hu_y = v(f_2 + f_3 + f_4) - v(f_6 + f_7 + f_8), \quad (1.44)$$


 FIGURE 1.11 – Conditions limites macroscopiques, réseau $D2Q9$.

cela conduit aux distributions, [Zou and He \(1997\)](#)

$$f_1 = f_5 + \frac{2}{3v}hu_x \quad (1.45)$$

$$f_2 = f_6 + \frac{1}{2}(f_7 - f_3) + \frac{1}{6v}hu_x + \frac{1}{2v}hu_y \quad (1.46)$$

$$f_8 = f_4 + \frac{1}{2}(f_3 - f_7) + \frac{1}{6v}hu_x - \frac{1}{2v}hu_y, \quad (1.47)$$

qui est équivalent aux résultats donnés par J. G. Zhou dans [Zhou \(2004a\)](#) avec $u_y = 0$. De manière analogue, on peut déterminer les distributions inconnues f_4 , f_5 , f_6 au bord droit.

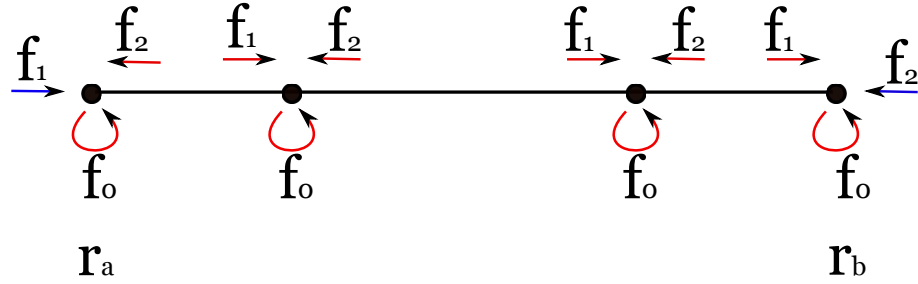


FIGURE 1.12 – Conditions limites macroscopiques, réseau $D1Q3$.

Dans des réseaux de type 1D, et pour des modèles d'écoulement de fluide, il peut arriver qu'on impose la hauteur (h) et le débit (hu) séparément. Pour un réseau tel que décrit sur Fig. 1.12, on aura :

1. **pour la hauteur** : les distributions inconnues sont données

– à gauche par

$$f_1 = h - (f_0 + f_2); \quad (1.48)$$

– et à droite par

$$f_2 = h - (f_0 + f_1); \quad (1.49)$$

2. **pour le débit** : les distributions seront données

– à gauche par

$$f_1 = \frac{hu}{v} + f_2; \quad (1.50)$$

– à droite par

$$f_2 = f_1 - \frac{hu}{v}. \quad (1.51)$$

Ces conditions peuvent intégrer des relaxations. Ces dernières peuvent s'avérer parfois nécessaires, [Georges and Litrico \(2002\)](#).

1.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit la méthode de Boltzmann sur réseau en vue de son application à la modélisation des écoulements en eaux peu profondes. Après un rappel historique de l'évolution de la méthode (via les automates cellulaires et la méthode des gaz sur réseau), nous avons défini les différentes variables et les

dynamiques que nous avons dans le cadre de cette modélisation. Les aspects concernant les conditions limites ont également été abordés en 1D et en 2D, notamment pour des conditions de type réseau, mais aussi pour des conditions permettant d'imposer directement des variables macroscopiques. La prise en compte des conditions aux limites, que ce soit pour une interconnexion interne, ou pour une interconnexion avec l'extérieur a, également, été abordée.

Nous avons enfin décrit dans ce chapitre les canaux d'irrigation que nous souhaitons modéliser et analyser avec la méthode de Boltzmann sur réseau.

Chapitre 2

Modélisation des écoulements en eaux peu profondes par la méthode LB

La modélisation des écoulements en eaux peu profondes a fait depuis des décennies l'objet d'une activité de recherche assez conséquente, [Graf and Altinakar \(2000\)](#), [Georges and Litrico \(2002\)](#), [Barré de Saint-Venant \(1871\)](#), [Clarkson and Mansfield \(1994\)](#), [Dulhoste \(2001\)](#), [Bennis \(2007\)](#), [Khatibi \(2003\)](#). Ces écoulements sont souvent représentés par les équations de Saint-Venant. Pour pouvoir étudier ces équations, notamment en dimension finie, il est courant de définir des modèles discrets qui peuvent être obtenus à partir de méthodes de discrétisation (différences finies, volumes finis, etc.). Dans ce chapitre, nous allons présenter une modélisation de ces écoulements par la méthode de Boltzmann sur réseau.

Dans la section [2.1](#), nous présentons la modélisation $1D$ par la méthode de Boltzmann sur réseau des écoulements en eaux peu profondes pour la commande et l'observation. Nous commencerons par présenter la mise sous forme de représentation d'état des modèles obtenus, puis nous traiterons des entrées et sorties associées au modèle. Nous terminerons par la présentation d'un formalisme semi-groupe, lequel sera utilisé dans les chapitres suivants.

Dans la section [2.2](#), nous traitons des extensions vers des modèles $2D$ et présentons quelques résultats de simulation.

Dans la section [2.3](#), nous présentons les méthodes de discrétisation dites classiques utilisées pour approcher les équations représentant les écoulements en eaux peu profondes. Ces méthodes seront utilisées pour des comparaisons avec la méthode LB.

Dans la section [2.4](#), nous présentons quelques comparaisons entre la méthode de Boltzmann sur réseau et les méthodes dites classiques. Ces comparaisons porteront sur la commandabilité des modèles LB et celle des modèles obtenus par discrétisation des équations de Saint-Venant.

Le chapitre se termine par un rappel des points abordés et des résultats obtenus.

2.1 Modélisation 1D pour la commande et l'observation

Dans cette section, nous considérons un réseau $D1Q3$ avec les vitesses $v_1 = v$, $v_2 = -v$ et $v_0 = 0$ (voir Fig. 2.1). Pour ce réseau, nous allons présenter le modèle d'état adapté à la méthode de Boltzmann sur réseau. Il s'agira de définir une dynamique globale à partir de la dynamique locale. Nous spécifierons également les entrées et sorties du système. Enfin, une formalisation de type semi-groupe sera établie.

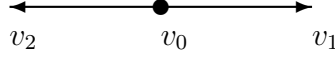


FIGURE 2.1 – Modèle D1Q3

2.1.1 Mise sous forme de représentation d'état

2.1.1.1 La dynamique locale

Nous rappelons que la dynamique locale est définie par les différentes fonctions de distribution arrivant à un instant $t + \delta t$ (avec δt le pas temporel de discrétisation) sur un site donné en fonction des fonctions de distribution des sites voisins au temps t . Elle est donnée par, [Zhou \(2004a\)](#)

$$f_i(r_j + v_i \delta t, t + \delta t) = f_i(r_j, t) + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i), \quad (2.1)$$

que l'on pourrait écrire autour du site r_j , dans le cas du modèle $D1Q3$ considéré (Fig. 2.1) et sans terme de force, par :

$$f_1(r_j, t + \delta t) = f_1(r_j - v \delta t, t) + \frac{1}{\tau}(f_1^{eq} - f_1) \quad (2.2)$$

$$f_0(r_j, t + \delta t) = f_0(r_j, t) + \frac{1}{\tau}(f_0^{eq} - f_0) \quad (2.3)$$

$$f_2(r_j, t + \delta t) = f_2(r_j + v \delta t, t) + \frac{1}{\tau}(f_2^{eq} - f_2), \quad (2.4)$$

où $\frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i)$ est exprimé au même site et aux mêmes instants que $f_i(r_j + v_i \delta t, t)$. En normalisant le pas temporel, on aura $r_j - v \delta t = r_{j-1}$ et $r_j + v \delta t = r_{j+1}$, et $\delta t = 1$. Les équations précédentes sont alors données par :

$$f_1(r_j, t + 1) = f_1(r_{j-1}, t) + \frac{1}{\tau}(f_1^{eq} - f_1) \quad (2.5)$$

$$f_0(r_j, t + 1) = f_0(r_j, t) + \frac{1}{\tau}(f_0^{eq} - f_0) \quad (2.6)$$

$$f_2(r_j, t + 1) = f_2(r_{j+1}, t) + \frac{1}{\tau}(f_2^{eq} - f_2). \quad (2.7)$$

2.1.1.2 La dynamique globale

La dynamique globale du modèle de Boltzmann sur réseau sera définie par la dynamique de l'ensemble des densités aux points (cellules) du réseau à un instant $t + 1$ en fonction des densités aux instants précédents. Il est commode pour la suite de définir le nombre adimensionnel

$$\Psi^2 = \frac{v^2}{gh}, \quad (2.8)$$

qui peut être vu comme un nombre de Froude du réseau. Dans le réseau considéré, les densités de distribution d'équilibre doivent vérifier

$$\sum_i f_i^{eq} = h \quad (2.9)$$

$$\sum_i v_i f_i^{eq} = hu \quad (2.10)$$

$$\sum_i v_i^2 f_i^{eq} = \frac{1}{2}gh^2 + hu^2. \quad (2.11)$$

La résolution de ce système permet d'avoir les différentes densités de distribution qui peuvent s'écrire :

$$f_0^{eq} = h - \frac{1}{2v^2}gh^2 - \frac{1}{v^2}hu^2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2v^2}gh & 1 - \frac{1}{2v^2}gh - \frac{u}{v} & 1 - \frac{1}{2v^2}gh + \frac{u}{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$f_1^{eq} = \frac{1}{4v^2}gh^2 + \frac{1}{2v}hu + \frac{1}{2v^2}hu^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4v^2}gh & \frac{1}{4v^2}gh + (\frac{1}{2} + \frac{u}{2v}) & \frac{1}{4v^2}gh - (\frac{1}{2} + \frac{u}{2v}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$f_2^{eq} = \frac{1}{4v^2}gh^2 - \frac{1}{2v}hu + \frac{1}{2v^2}hu^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4v^2}gh & \frac{1}{4v^2}gh - (\frac{1}{2} - \frac{u}{2v}) & \frac{1}{4v^2}gh + (\frac{1}{2} - \frac{u}{2v}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

On peut donc réécrire les fonctions de la dynamique locale comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} f_0(r_j, t+1) &= f_0(r_j, t) + \frac{1}{\tau}(f_0^{eq}(r_j, t) - f_0(r_j, t)) \\ &= \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \tau - \frac{1}{2\Psi^2} & 1 - \frac{1}{2\Psi^2} - \frac{F_r}{\Psi} & 1 - \frac{1}{2\Psi^2} + \frac{F_r}{\Psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(r_j, t) \\ f_1(r_j, t) \\ f_2(r_j, t) \end{bmatrix} \\ &= A_0 \begin{bmatrix} f_0(r_j, t) \\ f_1(r_j, t) \\ f_2(r_j, t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} f_1(r_j, t+1) &= f_1(r_{j-1}, t) + \frac{1}{\tau}(f_1^{eq}(r_{j-1}, t) - f_1(r_{j-1}, t)) \\ &= \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \frac{1}{4\Psi^2} & \frac{1}{4\Psi^2} + \frac{F_r}{2\Psi} + \tau - \frac{1}{2} & \frac{1}{4\Psi^2} - \frac{F_r}{2\Psi} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(r_{j-1}, t) \\ f_1(r_{j-1}, t) \\ f_2(r_{j-1}, t) \end{bmatrix} \\ &= A_1 \begin{bmatrix} f_0(r_{j-1}, t) \\ f_1(r_{j-1}, t) \\ f_2(r_{j-1}, t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
f_2(r_j, t+1) &= f_2(r_{j+1}, t) + \frac{1}{\tau}(f_2^{eq}(r_{j+1}, t) - f_2(r_{j+1}, t)) \\
&= \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{4\Psi^2} \quad \frac{1}{4\Psi^2} + \frac{F_r}{2\Psi} - \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4\Psi^2} - \frac{F_r}{2\Psi} + \tau - \frac{1}{2} \right] \begin{bmatrix} f_0(r_{j+1}, t) \\ f_1(r_{j+1}, t) \\ f_2(r_{j+1}, t) \end{bmatrix}, \\
&= A_2 \begin{bmatrix} f_0(r_{j+1}, t) \\ f_1(r_{j+1}, t) \\ f_2(r_{j+1}, t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

où F_r est le nombre de Froude réel.

En utilisant les relations précédentes, on peut définir un système autonome qui a la forme d'un système discret :

$$x(k+1) = Ax(k), \tag{2.18}$$

où le vecteur d'état est défini par

$$x(k) = [f_0(r_1, k) \quad f_1(r_1, k) \quad f_2(r_1, k) \quad \cdots \quad f_0(r_N, k) \quad f_1(r_N, k) \quad f_2(r_N, k)]^T \tag{2.19}$$

et la matrice dynamique du système A de dimension $3N \times 3N$ est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_1 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_1 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.20}$$

Le temps est normalisé, les matrices 0 sont des matrices nulles de dimensions appropriées et on considère des conditions aux bords de type périodiques.

On notera qu'il s'agit d'un système autonome non linéaire de la forme $x(k+1) = A(x(k))x(k)$ puisque les matrices élémentaires A_i dépendent des nombres de froude réel (F_r) et de celui relatif au réseau (Ψ) qui eux même dépendent des variables macroscopiques ($h = \sum f_i$, $hu = \sum v_i f_i$)¹.

1. Une étude d'un système linéarisé du modèle autour d'un point d'équilibre (h_e, u_e) sera faite, voir 2.1.1.4.

2.1.1.3 Modèle avec terme de force

On peut définir un modèle d'état incorporant les termes de force en partant de la dynamique locale avec terme de force²

$$f_i(r_{j+\bar{v}}, t+1) = f_i(r_j, t) + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq}(r_j, t) - f_i(r_j, t)) + w_i \frac{1}{c_s^2} v_i F, \quad (2.21)$$

où $\bar{v}_i = \frac{v_i}{v}$ et le pas de temps δt est normalisé. Les paramètres³ w_i et c_s^2 sont obtenus à partir des équations (1.34-1.38). Le modèle avec terme de force peut être écrit sous la forme

$$f_i(r_j, t+1) = A_i \begin{bmatrix} f_0(r_{j-\bar{v}_i}, t) \\ f_1(r_{j-\bar{v}_i}, t) \\ f_2(r_{j-\bar{v}_i}, t) \end{bmatrix} + \frac{\bar{v}_i}{2v} F, \quad (2.22)$$

où A_i , avec $i = 0, 1, 2$ sont les matrices précédemment définies.

En appliquant cette force à chaque site, le système peut s'écrire sous la forme du système discret

$$x(k+1) = Ax(k) + \mathbf{B} \quad (2.23)$$

avec $x(k)$ défini en (2.19), A la matrice déjà définie en (2.20) et \mathbf{B} (en gras, et à différencier de la largeur B du canal) est de la forme :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

avec

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\delta t}{2v} F \\ -\frac{\delta t}{2v} F \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Le temps est normalisé et les matrices 0 sont des matrices nulles de dimensions appropriées.

2.1.1.4 Modèle linéarisé

Soient les f_i^{eqs} , densités qui correspondent aux profils de hauteur d'eau h_e et de vitesse u_e à l'équilibre, autour desquels le modèle est linéarisé. On a :

$$\sum_i f_i^{eqs} = h_e, \quad (2.26)$$

et

$$\sum_i v_i f_i^{eqs} = h_e u_e. \quad (2.27)$$

2. Nous avons choisi pour cette introduction d'utiliser l'ajout d'un terme de force simple pour la compacité de son formalisme. Cependant nous utiliserons plutôt des forces de type Zhou ou Guo-Chopard, essentiellement à cause des aptitudes qu'elles ont à amener le système vers un profil de surface plat dans des expériences avec fond non uniforme.

3. Le calcul conduit à $w_0 = 2/3$, $w_1 = w_2 = 1/6$ et que $c_s^2 = v^2/3$.

En posant

$$f_i = f_i^{eqs} + \epsilon_i, \quad (2.28)$$

où ϵ_i est la variable linéarisé par rapport au profil de linéarisation (h_e, u_e) , nous pouvons écrire

$$h = \sum_i f_i = h_e + \sum_i \epsilon_i \quad (2.29)$$

$$hu = \sum_i v_i f_i = h_e u_e + v(\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{hu}{h} \\ &= \frac{1}{h_e} (h_e u_e + v(\epsilon_1 - \epsilon_2)) \frac{1}{1 - \frac{\sum_i \epsilon_i}{h_e}} \\ &\simeq \frac{1}{h_e} (h_e u_e + v(\epsilon_1 - \epsilon_2)) (1 - \frac{\sum_i \epsilon_i}{h_e}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Soit

$$u = u_e - \frac{u_e}{h_e} \sum_i \epsilon_i + \frac{v}{h_e} (\epsilon_1 - \epsilon_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.32)$$

Remarque 2.1 A chaque étape de calcul, on a négligé les terme ϵ_i d'ordre ≥ 2 . On a ainsi

$$hu^2 = h_e u_e^2 - u_e^2 \sum_i \epsilon_i + 2v u_e (\epsilon_1 - \epsilon_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.33)$$

En utilisant les équation f_i en (2.5-2.7) de la dynamique locale, on a :

$$\begin{aligned} f_i^{eqs}(r_{j+\overline{v_i}}, t+1) + \epsilon_i(r_{j+\overline{v_i}}, t+1) &= f_i^{eqs}(r_j, t) + \epsilon_i(r_j, t) + \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i^{eqs} - \epsilon_i) \\ \iff \epsilon_i(r_{j+\overline{v_i}}, t+1) &= (1 - \frac{1}{\tau}) \epsilon_i(r_j, t) + \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i^{eqs}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

On peut exprimer les fonctions d'équilibre local f_i^{eq} en fonction de celles au point d'équilibre (h_e, u_e) , on a :

$$f_0^{eq} = f_0^{eqs} + (1 - \frac{1}{v^2} g h_e + \frac{u_e^2}{v^2}) \sum_i \epsilon_i - 2 \frac{u_e}{v} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad (2.35)$$

$$f_1^{eq} = f_1^{eqs} + (\frac{1}{2v^2} g h_e - \frac{u_e^2}{2v^2}) \sum_i \epsilon_i + (\frac{1}{2} + \frac{u_e}{v}) (\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad (2.36)$$

$$f_2^{eq} = f_2^{eqs} + (\frac{1}{2v^2} g h_e - \frac{u_e^2}{2v^2}) \sum_i \epsilon_i - (\frac{1}{2} - \frac{u_e}{v}) (\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad (2.37)$$

Soit finalement :

$$\epsilon_0(r_j, t+1) = T_0 \begin{bmatrix} \epsilon_0(r_j, t) \\ \epsilon_1(r_j, t) \\ \epsilon_2(r_j, t) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\epsilon_1(r_j, t+1) = T_1 \begin{bmatrix} \epsilon_0(r_{j-1}, t) \\ \epsilon_1(r_{j-1}, t) \\ \epsilon_2(r_{j-1}, t) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\epsilon_2(r_j, t+1) = T_2 \begin{bmatrix} \epsilon_0(x_{r+1}, t) \\ \epsilon_1(x_{r+1}, t) \\ \epsilon_2(x_{r+1}, t) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

où

$$T_0 = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \tau - \frac{1}{\Psi_e^2}(1 - Fr_e^2) & 1 - \frac{1}{\Psi_e^2}(1 - Fr_e^2) - 2\frac{Fr_e}{\Psi_e} & 1 - \frac{1}{\Psi_e^2}(1 - Fr_e^2) + 2\frac{Fr_e}{\Psi_e} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$T_1 = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\Psi_e^2}(1 - Fr_e^2) & \tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Psi_e^2}(1 - Fr_e^2) + \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \frac{1}{2\Psi_e^2}(1 - Fr_e^2) - \frac{1}{2} - \frac{Fr_e}{\Psi_e} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$T_2 = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\Psi_e^2}(1 - Fr_e^2) & \frac{1}{2\Psi_e^2}(1 - Fr_e^2) - \frac{1}{2} + \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Psi_e^2}(1 - Fr_e^2) - \frac{Fr_e}{\Psi_e} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

En utilisant les relations précédentes, on peut définir un système autonome linéaire autour du point d'équilibre (h_e, u_e) qui a la forme d'un système discret :

$$z(k+1) = Tz(k) \quad (2.44)$$

avec

$$z(k) = [\epsilon_0(r_1, k), \epsilon_1(r_1, k), \epsilon_2(r_1, k), \dots, \epsilon_0(r_N, k), \epsilon_1(r_N, k), \epsilon_2(r_N, k)]^T \quad (2.45)$$

et

$$T = \begin{bmatrix} T_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & T_1 \\ 0 & T_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ T_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & T_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & T_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & T_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & T_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & T_1 & 0 \\ T_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Le temps est normalisé, les matrices 0 sont des matrices nulles de dimensions appropriées et on considère des conditions aux bords de type périodiques. Une prise en compte du terme de force se fait par linéarisation de ce terme. Dans le cas des forces de frottement et de gravité simples, où le terme de frottement est donné par la formule de Manning-Strickler :

$$J = \frac{n_s^2 u^2}{\left(\frac{Bh}{B+2h}\right)^{4/3}}, \quad (2.47)$$

le terme de force simple est

$$F = gh(I - J). \quad (2.48)$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \left(\frac{Bh}{B+2h} \right)^{4/3} &= \left(\frac{Bh_e}{B+2h_e} \right)^{4/3} \left(\frac{1 + \frac{4}{3h_e} \sum_i \epsilon_i}{1 + \frac{8}{3(B+2h_e)} \sum_i \epsilon_i} \right) \\ &= \left(\frac{Bh_e}{B+2h_e} \right)^{4/3} \left(1 + \frac{4}{3h_e} \frac{B}{(B+2h_e)} \sum_i \epsilon_i \right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(\frac{Bh_e}{B+2h_e} \right)^{4/3}} &= \frac{1}{\left(\frac{Bh_e}{B+2h_e} \right)^{4/3} \left(1 + \frac{4}{3h_e} \frac{B}{(B+2h_e)} \sum_i \epsilon_i \right)} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{Bh_e}{B+2h_e} \right)^{4/3}} \left(1 - \frac{4}{3h_e} \frac{B}{(B+2h_e)} \sum_i \epsilon_i \right). \end{aligned} \quad (2.50)$$

D'autre part :

$$n_s^2 u^2 \simeq n_s^2 u_e^2 - 2 \frac{n_s^2 u_e^2}{h_e} \sum_i \epsilon_i + 2 \frac{n_s^2 v u_e}{h_e} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad (2.51)$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} J &= \frac{n_s^2 u^2}{\left(\frac{Bh}{B+2h} \right)^{4/3}} \\ &\simeq \frac{n_s^2 u_e^2 - 2 \frac{n_s^2 u_e^2}{h_e} \sum_i \epsilon_i + 2 \frac{n_s^2 v u_e}{h_e} (\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\left(\frac{Bh_e}{B+2h_e} \right)^{4/3}} \left(1 - \frac{4}{3h_e} \frac{B}{(B+2h_e)} \sum_i \epsilon_i \right) \\ &\simeq J_e + \left(-\frac{2}{h_e} J_e - \frac{4J_e R_{he}}{3h_e^2} \right) \sum_i \epsilon_i + \frac{2J_e v}{h_e u_e} (\epsilon_1 - \epsilon_2), \end{aligned} \quad (2.52)$$

avec $R_{he} = \frac{Bh_e}{(B+2h_e)}$ et $J_e = \frac{n_s^2 u^2}{R_{he}^{4/3}}$. Le terme de force s'écrit finalement sous la forme

$$\begin{aligned} F &= gh \left(I - \frac{n^2 u^2}{\left(\frac{Bh}{B+2h} \right)^{4/3}} \right) \\ &\simeq g \left(h_e + \sum_i \epsilon_i \right) \left(I - \frac{n^2 u^2}{\left(\frac{Bh}{B+2h} \right)^{4/3}} \right) \\ &\simeq g \left(\left(J_e + \frac{4J_e R_{he}}{3h_e} + I \right) \sum_i \epsilon_i - \frac{2J_e v}{u_e} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \right) + g(h_e I - h_e J_e). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Le modèle linéaire avec terme de force sera donc donné par

$$\epsilon_0(r_j, t+1) = T_0 \begin{bmatrix} \epsilon_0(r_j, t) \\ \epsilon_1(r_j, t) \\ \epsilon_2(r_j, t) \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$\epsilon_1(r_j, t+1) = T_1 \begin{bmatrix} \epsilon_0(r_{j-1}, t) \\ \epsilon_1(r_{j-1}, t) \\ \epsilon_2(r_{j-1}, t) \end{bmatrix} + T_N \begin{bmatrix} \epsilon_0(r_{j-1}, t) \\ \epsilon_1(r_{j-1}, t) \\ \epsilon_2(r_{j-1}, t) \end{bmatrix} + gh_e(I - J_e) \quad (2.55)$$

$$\epsilon_2(r_j, t+1) = T_2 \begin{bmatrix} \epsilon_0(r_{j+1}, t) \\ \epsilon_1(r_{j+1}, t) \\ \epsilon_2(r_{j+1}, t) \end{bmatrix} - T_N \begin{bmatrix} \epsilon_0(r_{j+1}, t) \\ \epsilon_1(r_{j+1}, t) \\ \epsilon_2(r_{j+1}, t) \end{bmatrix} - gh_e(I - J_e) \quad (2.56)$$

avec

$$T_N = \frac{1}{2v}g \begin{bmatrix} (I + J_e + \frac{4J_e R_e}{3h_e}) & (I + J_e + \frac{4J_e R_e}{3h_e} - \frac{2J_e v}{u_e}) & (I + J_e + \frac{4J_e R_e}{3h_e} + \frac{2J_e v}{u_e}) \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

En supposant que ⁴ $J_e = I$, on peut écrire le modèle comme un système autonome autour d'un point d'équilibre (h_e, u_e)

$$z(k+1) = T_f z(k) \quad (2.58)$$

avec $z(k)$ le vecteur défini en (2.45) et

$$T_f = \begin{bmatrix} T_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & T_1 + T_N \\ 0 & T_2 - T_N & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ T_1 + T_N & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_2 - T_N & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & T_1 + T_N & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & T_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & T_2 - T_N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & T_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & T_1 + T_N & 0 \\ T_2 - T_N & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Le pas de temps est normalisé et les matrices 0 sont des matrices nulles de dimensions appropriées.

Remarque 2.2 *Dans cette modélisation, le traitement des conditions aux frontières est fait en utilisant des conditions de type périodique. Dans le cas où l'on s'intéresserait à la commande ou à l'observation du système, il s'avère primordial de définir les entrées et sorties du système, celles-ci, dans le cas d'une commande ou d'une observation aux frontières, correspondent exactement à la détermination des conditions limites adéquates.*

4. Cette égalité représente une compensation des forces de gravité et de frottement, et correspond à des profils d'équilibre uniformes. Il est montré, voir [Litrico et al. \(2005\)](#), que l'utilisation de cette égalité ne réduit pas les chances de commandabilité du système initial et que les profils obtenus couvrent une large gamme de ceux considérés d'un point de vue pratique.

2.1.2 À propos des entrées et des sorties

Dans cette étude, nous nous sommes focalisés sur les entrées (commandes du système), mais le traitement des sorties (mesures ou observation) peut être fait de manière analogue. Nous noterons \mathbf{u} le vecteur des variables d'entrées (à différencier de u qui est la vitesse macroscopique d'écoulement de l'eau). On considère :

- un domaine spatial, représenté par un réseau cellulaire \mathcal{T} ;
- une région $\mathcal{T}^x \subset \mathcal{T}$ où les sites du réseau sont excitables ;
- un espace d'état Z_{lb} contenant l'état $x(k)$ du modèle non linéaire (2.18) ou l'état $z(k)$ du modèle linéarisé (2.58) ;
- un espace de commande $\mathcal{U} = l_2(\mathcal{T}^x, \mathbf{R})$ où

$$l_2(\mathcal{T}^x, \mathbf{R}) = \left\{ \mathbf{u} : \mathcal{T}^x \rightarrow \mathbf{R} / \sum_{r_j \in \mathcal{T}^x} \mathbf{u}(r_j) \mathbf{u}(r_j) < \infty \right\}. \quad (2.60)$$

L'espace $l_2(\mathcal{T}^x, \mathbf{R})$ peut être dans le cas de dimension finie (nombre fini de sites excitables dans le réseau) identifié à l'espace \mathbf{R}^p avec $p = \text{card}(\mathcal{T}^x)$;

- un opérateur d'entrée

$$\begin{aligned} G : \mathcal{U} &\rightarrow Z_{lb} \\ \mathbf{u} &\rightarrow G\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Dans ces modèles, en général, un opérateur local de commande décrit comment les sites $r_j \in \mathcal{T}^x$ sont excités. L'opérateur global d'entrée peut être défini comme suit :

$$G\mathbf{u} = \begin{cases} g_{r_j}(\mathbf{u}(r_j)) & \text{si } r_j \in \mathcal{T}^x \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (2.62)$$

Dans le cas général, ces définitions conduisent à l'introduction d'un système LB contrôlé, voir [El Yacoubi \(2008\)](#), [Ammor ep. El Attar \(2004\)](#)

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \mathcal{F}_{lb}(x_k, \mathbf{u}_k) \\ x_0 &\in Z_{lb} \end{cases} \quad (2.63)$$

Dans le cas linéaire, cela peut s'écrire sous la forme de la représentation d'état suivantes ⁵,

$$\begin{cases} z_{k+1} &= F_{lb}z_k + G_{lb}\mathbf{u}_k \\ z_0 &\in Z_{lb}^r \end{cases}, \quad (2.64)$$

où Z_{lb}^r est un espace d'état réduit dans lequel les états commandables (entrées) ont été enlevés. F_{lb} est la nouvelle matrice de la dynamique du système obtenue lorsqu'on projette la matrice dynamique T_f sur le nouvel espace d'état Z_{lb}^r :

$$F_{lb} = M^T T_f M, \quad (2.65)$$

où M est la matrice de projection retirant les états utilisés comme entrées. G_{lb} est la matrice de commande définie par :

$$G_{lb} = M^T T_f M_c, \quad (2.66)$$

où M_c est la matrice de projection sélectionnant les colonnes correspondant aux états considérés comme entrées. G_{lb} peut être vue comme l'opérateur de commande et F_{lb} comme le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{F_{lb}^k\}_{k \geq 0}$, [Packel \(1972\)](#), [Gibson \(1972\)](#).

5. En se basant sur les travaux dans [Ammor ep. El Attar \(2004\)](#), [El Yacoubi \(2008\)](#), le cas des automates cellulaires additifs correspond à celui de systèmes linéaires.

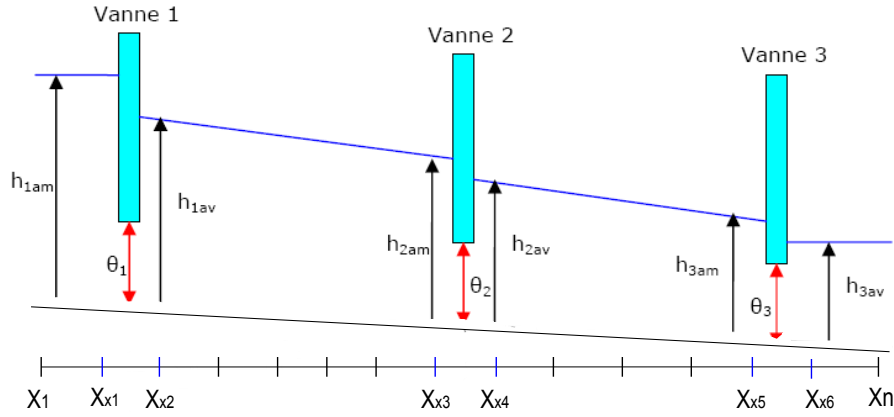


FIGURE 2.2 – Schéma d'interconnexion

Dans l'exemple du canal décrit sur la figure 2.2, nous supposons avoir N sites et 3 vannes. Nous considérons l'ensemble du canal comme étant le domaine \mathcal{T} . Les 2 sites autour de chaque vanne comme ceux appartenant à \mathcal{T}^x . Quand nous introduisons une vanne dans le canal, cette dernière agit comme une frontière de part et d'autre des 2 biefs. Nous pouvons ainsi imposer certaines fonctions de distributions au réseau comme si il s'agissait des conditions limites. Nous pouvons par exemple définir une commande telle que :

- si $r_j \in \mathcal{T}^x$ est avant la vanne, $\mathbf{u}(r_j) = \epsilon_2(r_j, k)$
- si $r_j \in \mathcal{T}^x$ est après la vanne, $\mathbf{u}(r_j) = \epsilon_1(r_j, k)$

et ceci, pour chaque vanne. Si les sites avant les vannes sont par exemple r_2 , r_8 et r_{14} , nous aurons comme commande :

$$\mathbf{u} = [\epsilon_2(r_2) \quad \epsilon_1(r_3) \quad \epsilon_2(r_8) \quad \epsilon_1(r_9) \quad \epsilon_2(r_{14}) \quad \epsilon_1(r_{15})]^T \quad (2.67)$$

Les matrices F_{lb} et G_{lb} , pour cet exemple, peuvent être obtenues facilement en remarquant que les lignes à retirer de la matrice de dynamique T_f pour former les matrices F_{lb} sont : 6, 8, 24, 26, 42 et 44, et la matrice M est obtenue en retirant les colonnes correspondantes dans la matrice identité.

2.1.3 Formalisme semi-groupe

Soit Z un espace de Hilbert, on définit le système autonome continu

$$\dot{z}(t) = Az(t), \quad (2.68)$$

où A définit la dynamique du système et $z \in Z$. On définit un semi-groupe fortement continu par, Engel and Nagel (2000), Affi et al. (2008), Curtain and Zwart (1995)

Définition 2.3 Une famille d'opérateurs $(\Phi_A(t)_{t \geq 0})$ bornés sur un espace de Hilbert Z est dite semi-groupe fortement continu si :

1. $\Phi_A(0) = I$
2. $\Phi_A(t+s) = \Phi_A(t)\Phi_A(s)$, pour tout $t, s \geq 0$
3. $\|\Phi_A(t)z - z\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0^+$, pour tout $z \in Z$.

La famille $(\Phi_A(t))$ est évidemment liée à l'opérateur dynamique A . Ainsi, on a la définition suivante

Définition 2.4 *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(\Phi_A(t)_{t \geq 0})$, l'opérateur A défini par*

$$Az = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi_A(t)z - z}{t} \quad (2.69)$$

quand cette limite existe.

Le domaine de A , noté $\mathcal{D}(A)$, est l'ensemble des $z \in Z$ pour lesquels cette limite existe.

$$\mathcal{D}(A) = \{z \in Z / \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi_A(t)z - z}{t} \text{ existe}\} \quad (2.70)$$

Proposition 2.5 *Soit $(\Phi_A(t)_{t \geq 0})$ un semi-groupe fortement continu sur Z de générateur infinitésimal A . Alors pour tout $z_0 \in \mathcal{D}(A)$, on a les propriétés suivantes :*

1. $\Phi_A(t)z_0 \in \mathcal{D}(A)$, pour tout $t \geq 0$
2. $\frac{d}{dt}(\Phi_A(t)z_0) = A\Phi_A(t)z_0 = \Phi_A(t)Az_0$ pour tout $t > 0$
3. $\frac{d^n}{dt^n}(\Phi_A(t)z_0) = A^n\Phi_A(t)z_0 = \Phi_A(t)A^n z_0$ pour tout $z_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $t \geq 0$
4. $\Phi_A(t)z_0 - z_0 = \int_0^t \Phi_A(s)Az_0 ds$, pour tout $t > 0$
5. Pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{D}(A^n)$ est dense dans Z si A est fermé.

Dans le domaine discret, un semi-groupe est une famille $\{F_{lb}^k, k = 0, 1, 2, \dots\}$, de puissances d'un opérateur linéaire borné F_{lb} , voir [Gibson \(1972\)](#). On a alors les propriétés des semi-groupes :

$$F_{lb}^j F_{lb}^k = F_{lb}^{j+k} \quad (2.71)$$

$$F_{lb}^0 = I. \quad (2.72)$$

Si de plus $\|F_{lb}^k\| \leq \lambda$, avec $k = 1, 2, \dots$, et λ une valeur réelle positive bornée, alors la famille $\{F_{lb}^k\}$ est uniformément bornée.

On pourra vérifier que l'opérateur de dynamique des modèles de Boltzmann sur réseau permet de définir un semi-groupe uniformément borné.

2.2 Extension en 2D

Les équations représentant les écoulements en eaux peu profondes peuvent être données en 2D par :

$$\partial_t h + \partial_x(hu_x) + \partial_y(hu_y) = 0 \quad (2.73)$$

$$\partial_t(hu_x) + \partial_x(hu_x^2 + \frac{1}{2}gh^2) + \partial_y(hu_x u_y) = F_x \quad (2.74)$$

$$\partial_t(hu_y) + \partial_x(hu_x u_y) + \partial_y(hu_y^2 + \frac{1}{2}gh^2) = F_y \quad (2.75)$$

où h est la hauteur d'eau dans le canal, u_x (respectivement u_y) est la vitesse suivant l'axe x (respectivement l'axe y), F_x (respectivement F_y) est le terme de force suivant l'axe x (respectivement l'axe y). Nous présentons dans la suite le modèle de Boltzmann sur réseau en 2D. Il a été montré, voir [Zhou \(2004a\)](#) que ce modèle pouvait converger vers les équations (2.73-2.75) à un terme de viscosité près.

2.2.1 La méthode de Boltzmann sur réseau en 2D

La modélisation des écoulements de fluides en eaux peu profondes en $1D$ s'avère être un outil simplificateur, puissant et rapide pour la résolution des systèmes à paramètres distribués. Il existe cependant des domaines ou des sections de canaux où la modélisation en $2D$ permet de mieux représenter le problème. Dans ces sections, les hypothèses ayant servies à la modélisation en $1D$ ne sont plus valables (c'est le cas par exemple avec les virages ayant un angle considérable de courbure). Pour construire un modèle $2D$ avec la méthode de Boltzmann sur réseau, nous choisissons d'utiliser un réseau $D2Q9$ tel que représenté sur la Fig. 2.3. Les vitesses associées à chaque direction peuvent être données par, voir Zhou (2004a) :

$$v_i = \begin{cases} (0, 0) & i = 0 \\ v[\cos \frac{(i-1)\pi}{4}, \sin \frac{(i-1)\pi}{4}], & i = 1, 3, 5, 7 \\ \sqrt{2}v[\cos \frac{(i-1)\pi}{4}, \sin \frac{(i-1)\pi}{4}], & i = 2, 4, 6, 8 \end{cases} \quad (2.76)$$

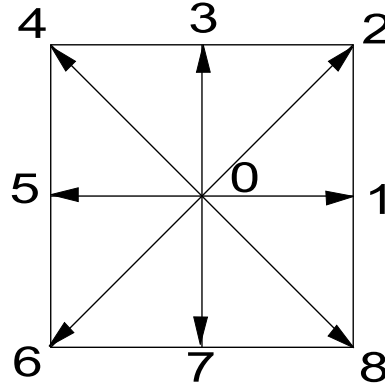


FIGURE 2.3 – Les vitesses d'un réseau $D2Q9$.

Les équations de Boltzmann sur réseau sont données dans ce cas par

$$f_i(r + v_i \delta t, t + \delta t) = f_i(r, t) + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq}(r, t) - f_i(r, t)) + \frac{\delta t}{6v^2} v_{i\alpha} F_\alpha \quad (2.77)$$

avec f_i^{eq} les densités de distribution d'équilibre données par

$$f_i^{eq} = \begin{cases} h - \frac{5gh^2}{6v^2} - \frac{2h}{3v^2} u_\alpha u_\alpha, & i = 0 \\ \frac{gh^2}{6v^2} + \frac{h}{3v^2} v_{i\alpha} u_\alpha + \frac{h}{2v^4} v_{i\alpha} v_{i\beta} u_\alpha u_\beta - \frac{h}{6v^2} u_\alpha u_\alpha, & i = 1, 3, 5, 7 \\ \frac{1}{4} \left(\frac{gh^2}{6v^2} + \frac{h}{3v^2} v_{i\alpha} u_\alpha + \frac{h}{2v^4} v_{i\alpha} v_{i\beta} u_\alpha u_\beta - \frac{h}{6v^2} u_\alpha u_\alpha \right), & i = 2, 4, 6, 8 \end{cases}, \quad (2.78)$$

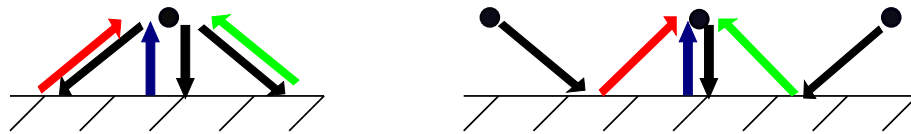


FIGURE 2.4 – Conditions de bords bounce-back à gauche et bord glissant (bounce-forward) à droite

où les indices α et β représentent des axes de projection pouvant être égales ou non aux axes x et y .

Les conditions aux limites que nous considérons sont des conditions de bord de type bounce-back et de type bord glissant (bounce-forward). Ces conditions aux limites sont représentées sur Fig. 2.4. Les densités sont données :

- dans le cas du **bounce-back** par

$$f_i^{in}(r_{j,k}, t+1) = f_{\bar{i}}^{out}(r_{j,k}, t), \quad (2.79)$$

où $r_{j,k}$ correspond au point de coordonnées (x_j, y_k) et \bar{i} est la direction opposée à la direction i , voir Fig. 2.3 ;

- dans le cas du **bord glissant** par les mêmes densités que celles du bounce-back pour les directions correspondant à un i impair, ainsi que dans les intersections de bords (coins supérieurs et inférieurs à gauche et à droite du réseau). Pour les autres densités inconnues, nous avons au bord à gauche

$$f_2^{in}(r_{1,k}, t+1) = f_4^{out}(r_{1,k-1}, t) \quad (2.80)$$

$$f_8^{in}(r_{1,k}, t+1) = f_6^{out}(r_{1,k+1}, t), \quad (2.81)$$

au bord à droite

$$f_4^{in}(r_{N_x,k}, t+1) = f_2^{out}(r_{N_x,k-1}, t) \quad (2.82)$$

$$f_6^{in}(r_{N_x,k}, t+1) = f_8^{out}(r_{N_x,k+1}, t), \quad (2.83)$$

où N_x est le nombre de sites suivant l'axe x . Au bord en bas, nous aurons

$$f_2^{in}(r_{j,1}, t+1) = f_8^{out}(r_{j-1,1}, t) \quad (2.84)$$

$$f_4^{in}(r_{j,1}, t+1) = f_6^{out}(r_{j+1,1}, t), \quad (2.85)$$

et au bord en haut

$$f_6^{in}(r_{j,N_y}, t+1) = f_4^{out}(r_{j+1,N_y}, t) \quad (2.86)$$

$$f_8^{in}(r_{j,N_y}, t+1) = f_2^{out}(r_{j-1,N_y}, t), \quad (2.87)$$

où N_y est le nombre de sites suivant l'axe y . La description du bord glissant peut être résumée sur Fig. 2.5, où on ne représente que les cas ne correspondant pas au bounce-back.

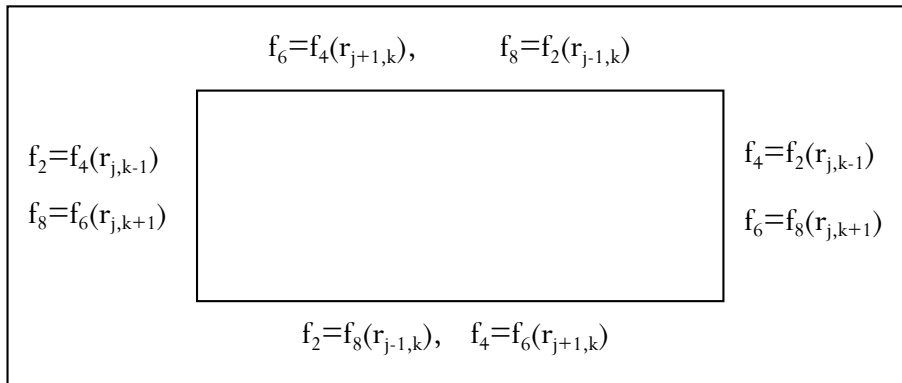


FIGURE 2.5 – Résumé des conditions de bord bounce-forward.

Dans la section suivante, nous présentons l'interconnexion des modèles $1D$ et $2D$, introduite dans [v.T. Pham \(2009\)](#) et nous rectifions quelques erreurs.

2.2.2 Interconnexion 1D-2D

L'interconnexion des modèles permet de définir des systèmes complexes. Elle est réalisée au moyen de jonctions - vannes, déversoirs, jonctions de type Y - reliant une section à une autre. Ces systèmes interconnectés peuvent constituer un réseau d'irrigation ou une partie de celui-ci. L'interconnexion de modèles 1D à l'aide des différentes jonctions est bien expliquée dans [v.T. Pham \(2009\)](#). Il y est considéré des interconnexions avec des pas de discrétisation spatiaux différents et une interconnexion des modèles 1D – 2D que nous proposons d'améliorer dans notre travail.

Pour cette dernière, nous considérons une interconnexion avec des domaines adjacents, voir Fig. 2.6, et une interconnexion avec des domaines se chevauchant, voir Fig. 2.7.

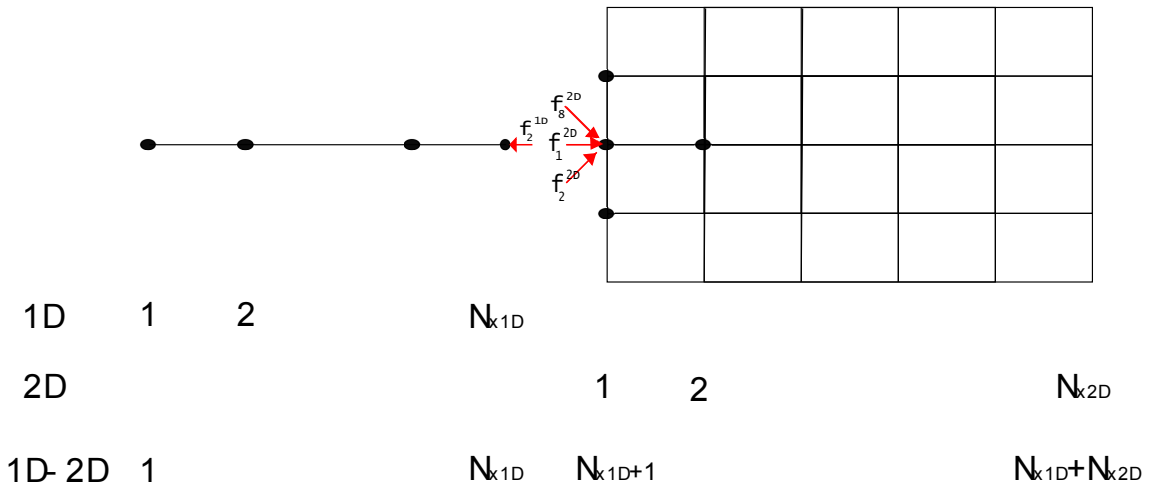


FIGURE 2.6 – Interconnexion 1D – 2D avec des domaines adjacents. N_{xdD} est le nombre de sites suivant l'axe \overrightarrow{Ox} de la partie dD ($d \in \{1, 2\}$).

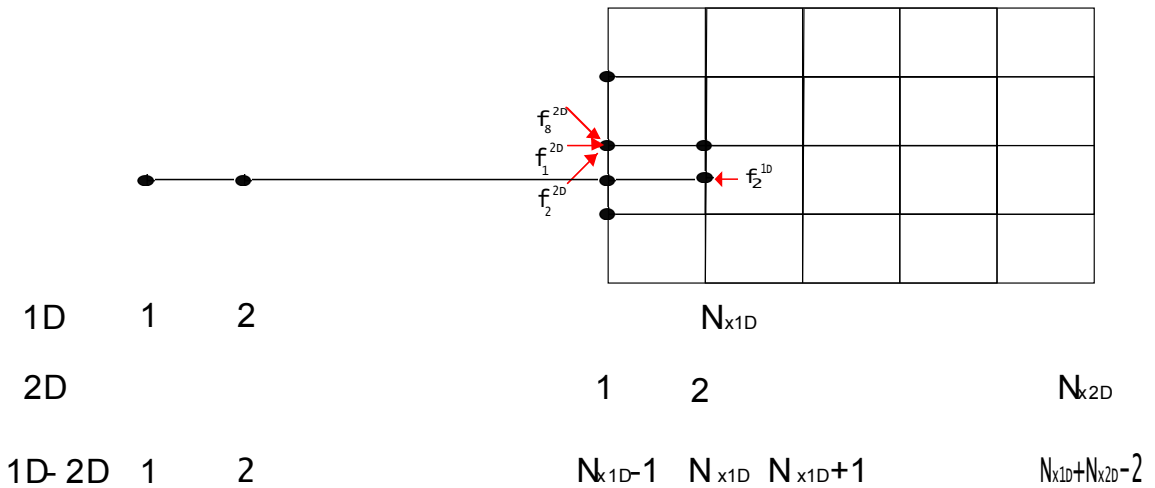


FIGURE 2.7 – Interconnexion 1D – 2D avec des domaines se chevauchant. N_{xdD} est le nombre de sites suivant l'axe \overrightarrow{Ox} de la partie dD ($d \in \{1, 2\}$).

Nous notons par $f_i^{dD,in}$ les fonctions de particules en direction i résultant de la propagation du modèle dD où $d \in \{1, 2\}$ et par $f_i^{dD,out}$ les fonctions de particules selon la direction i résultant de la collision dans le modèle dD .

2.2.2.1 Scénario de simulation

Pour la simulation, nous considérons les expériences proposées dans [v.T. Pham \(2009\)](#) : un canal rectangulaire de longueur $8m$ et de largeur $0.5m$ dont la première moitié est modélisée en $1D$ et la seconde en $2D$. Le pas de discrétisation choisi est de $0.1m$ sur la longueur et sur la largeur ($dx = dy$). Les conditions aux limites dans le sens de la longueur (à gauche et à droite) du canal sont choisies de type bounce-back. Les conditions dans le sens de la largeur du modèle $2D$ sont choisies de type bounce-forward. En effet, en supposant que l'écoulement a lieu principalement dans le sens de la longueur, ce choix s'avère de meilleure qualité qu'un bounce-back comme nous le présenterons dans l'analyse des résultats.

Au point d'interconnexion, plusieurs type de conditions peuvent être choisies. Nous résumons ci-dessous quelques unes d'entre elles et la détermination des densités inconnues :

- pour l'interconnexion avec des domaines adjacents, la détermination $f_2^{1D,in}$ se fait par continuité du système en conservant la masse, soit

$$f_2^{1D,in}(r_{Nx1D}) = \frac{1}{N_y} \sum_{k=1}^{N_y} \left(f_4^{2D,out}(r_{1,k}, t) + f_5^{2D,out}(r_{1,k}, t) + f_6^{2D,out}(r_{1,k}, t) \right) \quad (2.88)$$

où N_y est le nombre de site sur l'axe y . Les densités inconnues $f_1^{2D,in}$, $f_2^{2D,in}$ et $f_8^{2D,in}$ sont données par (1.45 - 1.47) après avoir déterminé le débit Q^{2D} pour chacun des sites au bord

$$Q^{2D}(r_{1,k}, t) = v \left(f_1^{1D,out}(r_{Nx1D}, t) - (f_4^{2D,in} + f_5^{2D,in} + f_6^{2D,in}) \right); \quad (2.89)$$

où les densités $f_i^{2D,in}$ sont exprimées en $r_{1,k}$ au temps t ;

- pour l'interconnexion des domaines se chevauchant, on pourra imposer sur chacun des bords, soit la hauteur, soit le débit. Pour la hauteur, nous aurons en $1D$

$$f_2^{1D,in}(r_{Nx1D}) = \frac{1}{N_y} \sum_{k=1}^{N_y} h^{2D}(r_{2,k}, t) - \left(f_0^{1D,in} + f_1^{1D,in} \right), \quad (2.90)$$

où les densités $f_i^{1D,in}$ sont exprimées en r_{Nx1D} au temps t . En $2D$, on détermine d'abord le débit $Q^{2D}(r_{1,k}, t) = Q^{1D}(r_{Nx1D-1}, t)$ donné par

$$Q^{2D} = v(h^{1D} - f_0^{2D} - f_3^{2D} - 2f_4^{2D} - 2f_5^{2D} - 2f_6^{2D} - f_7^{2D}), \quad (2.91)$$

puis on utilise les relations (1.45-1.47) pour déterminer les f_i inconnues.

Pour imposer le débit au bord $1D$, on a

$$f_2^{1D,in} = f_1^{1D,in} - \frac{1}{vN_y} \sum_{k=1}^{N_y} (h^{2D}(r_{1,k}, t)u^{2D}(r_{1,k}, t)) \quad (2.92)$$

et pour imposer le débit au bord en $2D$, on utilise les relations (1.42 - 1.44) pour déterminer les f_i inconnues.

Dans cette simulation, on s'intéresse au comportement de l'interconnection lorsque l'onde se propage dans le canal. On surveille principalement le passage de l'onde au point d'interconnection (milieu du canal).

2.2.2.2 Résultats de simulation

Le système est initialisé avec une bosse à la moitié de la première partie du canal (voir Fig. 2.8).

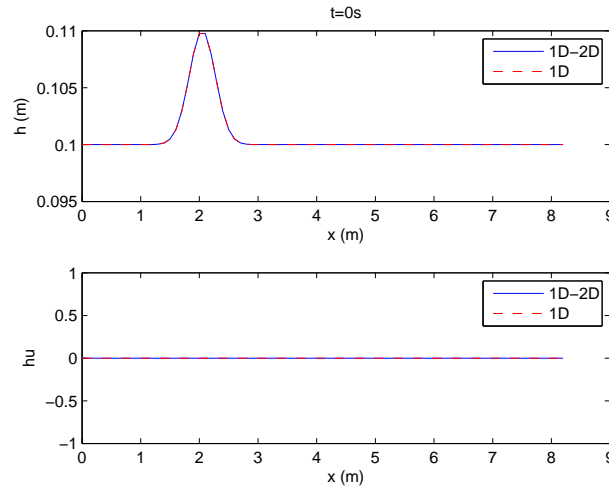


FIGURE 2.8 – Résultat interconnexion 1D-2D, domaines adjacents

Les résultats de simulation avec des domaines adjacents est fourni Fig. 2.9. On constate que la différence observée dans [v.T. Pham \(2009\)](#) n'existe plus, voir Fig. 2.10. La différence dans la considération des conditions aux limites dans le sens transversal de la section 2D s'avère donc déterminante.

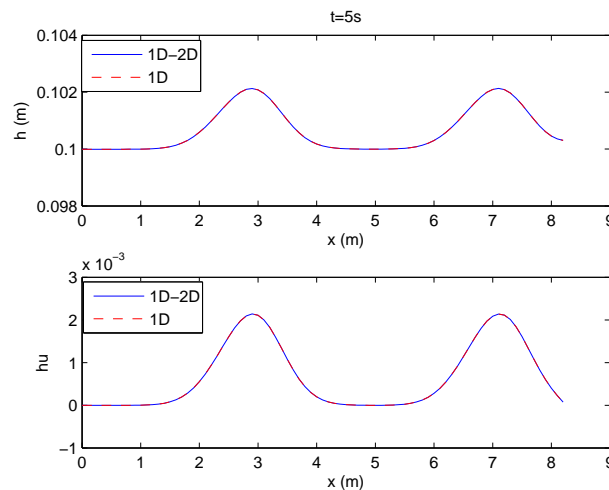


FIGURE 2.9 – Résultat interconnexion 1D – 2D, domaines adjacents

Un constat similaire est établi lorsque nous considérons des domaines se chevauchant, voir Fig. 2.11.

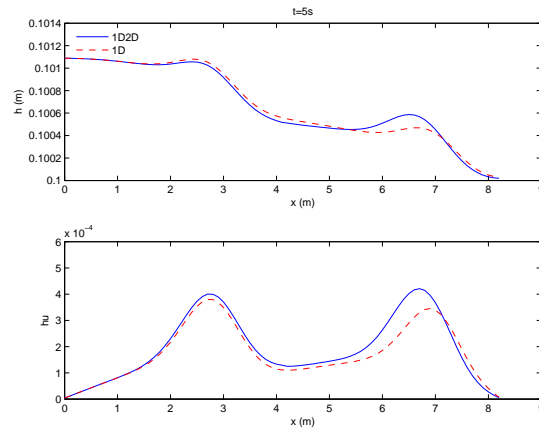


FIGURE 2.10 – Résultat interconnexion 1D – 2D, domaines adjacents de v.T. Pham (2009).

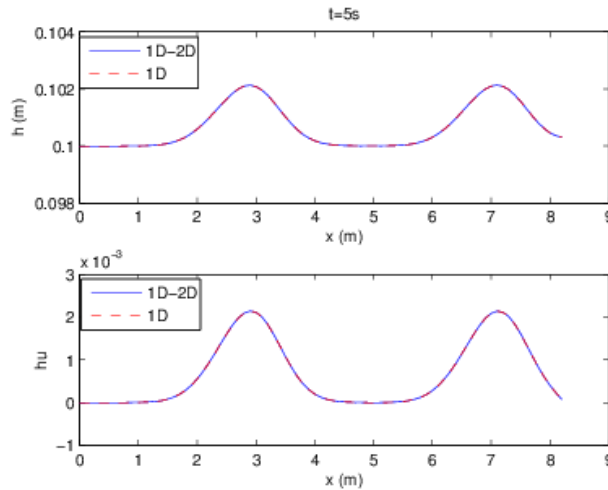


FIGURE 2.11 – Résultat interconnexion 1D – 2D, domaines se chevauchant

Remarque 2.6 Dans les résultats précédents, nous avons choisi d'imposer la continuité de hauteur au bord 1D et de débit au bord 2D. En imposant différemment (hauteur et hauteur, débit et débit, respectivement au bord 1D et 2D, par exemple) les conditions de bord d'interconnexion, nous retrouvons les même résultats.

2.3 Modélisation discrète des écoulements en eaux peu profondes via d'autres méthodes

La modélisation des écoulements en eaux peu profondes ne se fait pas uniquement avec la méthode de Boltzmann sur réseau, bien au contraire. Cette dernière est plutôt considérée comme une méthode nouvelle, devant encore faire la preuve de son utilité pour des problèmes hydrauliques réels. Il existe donc des méthodes, que nous dirons classiques, permettant de modéliser ces écoulements. Certaines de ces méthodes sont présentées et sont comparées dans la suite à la méthode de Boltzmann sur réseau. Dans ce chapitre, nous présenterons les comparaisons faites d'un

point de vue stabilité numérique, précision et temps de calcul numérique. Dans les chapitres suivants, les comparaisons porteront sur les aspects de la contrôlabilité et de l'observabilité.

Parmi les méthodes dites classiques, nous rencontrerons notamment les méthodes des différences finies, des volumes finis et la méthode de collocation par points.

Avant de présenter ces méthodes qui conduisent à des modèles discrets "concurrents" du modèle LB, nous introduisons une linéarisation des équations de Saint-Venant. Ce modèle linéarisé sera ensuite discrétisé par les différentes méthodes citées ci-dessus afin d'obtenir les modèles linéarisés discrets qui pourront être comparés au modèle LB.

Nous rappelons que le modèle d'état de Boltzmann sur réseau considéré est un modèle linéarisé discret. Dans le but de pouvoir comparer ces méthodes, nous introduisons une linéarisation des équations de Saint-venant qui seront par la suite discrétisées suivant ces différentes méthodes. Le modèle des équations de Saint-Venant en débit et tirant d'eau est donné par

$$\partial_t \begin{pmatrix} h(x, t) \\ Q(x, t) \end{pmatrix} = -\partial_x \begin{pmatrix} \frac{Q}{B} \\ \frac{Q^2}{Bh} + \frac{1}{2}gBh^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ gBh(I - J) \end{pmatrix}, \quad (2.93)$$

avec h la hauteur et Q le débit du fluide, B la largeur du canal considéré, x et t les variables spatiale et temporelle, respectivement, g l'accélération gravitationnelle, I et J les termes désignant la pente de fond et le coefficient de frottement.

En étudiant les variations ϵ_h de hauteur et ϵ_q de débit par rapport aux profils d'équilibre, et en posant $h = \epsilon_h + h_e$ et $Q = \epsilon_q + Q_e$,

– l'équation de continuité se linéarise sous la forme

$$\begin{aligned} \partial_t \epsilon_h &= -\frac{1}{B} \partial_x \epsilon_q \\ &= a \partial_x \epsilon_q, \end{aligned} \quad (2.94)$$

où $a = \frac{-1}{B}$;

– l'équation de dynamique peut se linéariser comme suit :

- la linéarisation du terme de frottement J ,

$$\begin{aligned} J(h, Q) &= \frac{n_s^2 Q^2}{B^2 h^2 \left(\frac{Bh}{B+2h} \right)^{4/3}} \\ &\simeq J_e + 2 \frac{J_e}{Q_e} \epsilon_q + \left(\frac{-10 R_{he} J_e}{3 h_e^2} + \frac{-4 R_{he} J_e}{B h_e} \right) \epsilon_h \\ &\simeq J_e + J_q \epsilon_q + J_h \epsilon_h, \end{aligned} \quad (2.95)$$

avec J_e le terme de frottement du profil (h_e, Q_e) et $R_{he} = Bh_e/(B + 2h_e)$ et les termes J_h et J_q peuvent être reconnus par identification ;

- l'équation de dynamique linéarisée

$$\begin{aligned} \partial_t \epsilon_q &= \left(\frac{-2Q_e}{Bh_e} \partial_x - gBh_e J_q \right) \epsilon_q + \\ &\quad \left(\frac{1}{B} \left(\frac{Q_e}{h_e} \right)^2 \partial_x - gBh_e \partial_x - gBh_e J_h \right) \epsilon_h + gBh_e (I - J_e) \end{aligned} \quad (2.96)$$

en prenant $I = J_e$, on aura

$$\begin{aligned}\partial_t \epsilon_q &= \left(\frac{-2Q_e}{Bh_e} \partial_x - gBh_e J_q \right) \epsilon_q + \left(\frac{1}{B} \left(\frac{Q_e}{h_e} \right)^2 \partial_x - gBh_e \partial_x - gBh_e J_h \right) \epsilon_h \\ &= b_q \partial_x \epsilon_q + d_q \epsilon_q + b_h \partial_x \epsilon_h + d_h \epsilon_h,\end{aligned}\quad (2.97)$$

avec $b_q = \frac{-2Q_e}{Bh_e}$, $d_q = -gBh_e J_q$, $b_h = \frac{Q_e^2}{Bh_e^2} - gBh_e$ et $d_h = -gBh_e J_h$.

2.3.1 La méthode des différences finies

Il existe une panoplie de méthodes basées sur les différences finies. Dans le cadre de ce travail, nous utiliserons, et présenterons la méthode de Preissmann. C'est une méthode aux différences finies semi-implicite. Elle est très utilisée pour la discrétisation des équations de Saint-Venant. Son principe de base est résumé sur Fig. 2.12. Une fonction p et ses dérivées en un point C de coordonnées $(i + \delta x/2, t + \theta \delta t)$ peuvent s'exprimer comme suit :

$$p_C = (1 - \theta) \frac{p_i + p_{i+1}}{2} + \theta \frac{p_i^+ + p_{i+1}^+}{2} \quad (2.98)$$

$$\partial_x p_C = (1 - \theta) \frac{p_{i+1} - p_i}{\delta x} + \theta \frac{p_{i+1}^+ - p_i^+}{\delta x} \quad (2.99)$$

$$\partial_t p_C = \frac{p_i^+ - p_i}{2\delta t} + \frac{p_{i+1}^+ - p_{i+1}}{2\delta t} \quad (2.100)$$

où les variables au temps $t + 1$ ont été notées d'un plus (+). Des détails sur le maillage et l'implémentation peuvent être consultés dans [Georges and Litrico \(2002\)](#), [Dulhoste \(2001\)](#), [Mansour \(1999\)](#).

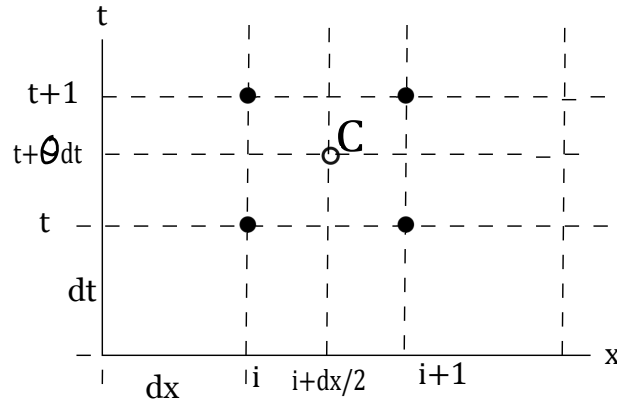


FIGURE 2.12 – Schéma de discrétisation par Preissmann

La modélisation sous forme d'équation d'état en utilisant cette méthode et la linéarisation précédemment proposées conduisent à :

- l'équation de continuité en variables linéarisées :

$$A_1 \begin{bmatrix} \tilde{h}_i^+ \\ \tilde{h}_{i+1}^+ \\ \tilde{Q}_i^+ \\ \tilde{Q}_{i+1}^+ \end{bmatrix} = B_1 \begin{bmatrix} \tilde{h}_i \\ \tilde{h}_{i+1} \\ \tilde{Q}_i \\ \tilde{Q}_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (2.101)$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}, \quad (2.102)$$

et

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

où

$$a_{11} = a_{12} = 1/(2\delta t), \quad (2.104)$$

$$a_{13} = -a_{14} = a\theta/\delta x, \quad (2.105)$$

$$b_{11} = b_{12} = 1/(2\delta t), \quad (2.106)$$

$$b_{13} = -b_{14} = -a(1-\theta)/\delta x; \quad (2.107)$$

– l'équation dynamique

$$A_2 \begin{bmatrix} \tilde{h}_i^+ \\ \tilde{h}_{i+1}^+ \\ \tilde{Q}_i^+ \\ \tilde{Q}_{i+1}^+ \end{bmatrix} = B_2 \begin{bmatrix} \tilde{h}_i \\ \tilde{h}_{i+1} \\ \tilde{Q}_i \\ \tilde{Q}_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (2.108)$$

avec

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

et

$$B_2 = \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

où

$$a_{21} = \theta(b_h/\delta x - d_h/2), \quad (2.111)$$

$$a_{22} = \theta(-b_h/\delta x - d_h/2), \quad (2.112)$$

$$a_{23} = 1/(2\delta t) + b_q\theta/\delta x - d_q\theta/2, \quad (2.113)$$

$$a_{24} = 1/(2\delta t) - b_q\theta/\delta x - d_q\theta/2, \quad (2.114)$$

$$b_{21} = (1-\theta)(-b_h/\delta x + d_h/2), \quad (2.115)$$

$$b_{22} = (1-\theta)(b_h/\delta x + d_h/2), \quad (2.116)$$

$$b_{23} = 1/(2\delta t) - (1-\theta)(b_q/\delta x - d_q/2), \quad (2.117)$$

$$b_{24} = 1/(2\delta t) + (1-\theta)(b_q/\delta x + d_q/2). \quad (2.118)$$

En notant \tilde{z} le vecteur d'état défini par

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 & \cdots & \tilde{h}_n & \tilde{Q}_1 & \cdots & \tilde{Q}_n \end{bmatrix}^T, \quad (2.119)$$

et pour un système discrétisé comme sur la figure 2.13 dans lequel on choisit d'imposer par exemple un débit en amont et une hauteur en aval (conditions également imposées dans le cas de la méthode LB), la représentation d'état du système peut s'écrire

$$\tilde{A}^+ \tilde{z}^+ = \tilde{A} \tilde{z} + \tilde{B} \tilde{u}, \quad (2.120)$$

où

$$\tilde{A}^+ = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.121)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & b_{13} & b_{14} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & b_{23} & b_{24} & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.122)$$

et

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T. \quad (2.123)$$

La variable $\tilde{\mathbf{u}}$ peut être définie dans cet exemple par

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_1^+ - \alpha \tilde{Q}_1 \\ \tilde{h}_4^+ - \alpha \tilde{h}_4 \end{pmatrix}, \quad (2.124)$$

où le paramètre α , avec $0 \leq \alpha \leq 1$, permet de relaxer les variations entre le système et la commande⁶.

La matrice A^+ est inversible, la représentation en espace d'état peut donc s'écrire :

$$\tilde{z}^+ = A_p \tilde{z} + B_p \tilde{\mathbf{u}}, \quad (2.125)$$

où $A_p = (\tilde{A}^+)^{-1} \tilde{A}$ et $B_p = (\tilde{A}^+)^{-1} \tilde{B}$.

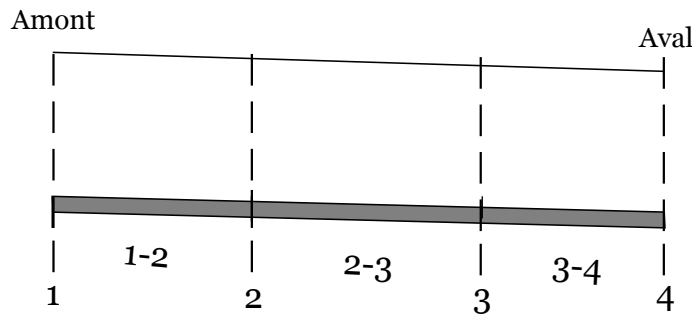


FIGURE 2.13 – Système bief et conditions aux frontières

6. voir Chapitre 2 de [Georges and Litrice \(2002\)](#) pour plus de détails sur l'opportunité d'une telle relaxation qui permet de conserver le caractère implicite et la stabilité associée au schéma.

2.3.2 La méthode des volumes finis :

La méthode des volumes finis (*FV* pour *Finite Volumes*) est le plus souvent utilisée pour discrétiser des équations de Saint-venant 2D (2.93) qu'on peut encore écrire sous forme vectorielle :

$$\partial_t \mathbf{U} + \nabla \mathbf{F} = \mathbf{S}, \quad (2.126)$$

où

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu_x \\ hu_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} hu_x & hu_y \\ hu_x^2 + g\frac{h^2}{2} & hu_x u_y \\ hu_x u_y & hu_y^2 + g\frac{h^2}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{jx}) \\ gh(S_{0y} - S_{jy}) \end{bmatrix}, \quad (2.127)$$

avec

- h : hauteur d'eau ;
- u_x et u_y : vitesse d'écoulement suivant les axes x et y , respectivement ;
- g : accélération gravitationnelle ;
- S_0 : pente de fond ;
- S_j : terme de frottement.

Le terme de frottement peut être estimé dans ce cas, voir Valiani et al. (1999), par

$$S_{jx} = \frac{n_s^2 u_x \sqrt{u_x^2 + u_y^2}}{R_h^{4/3}}, \quad S_{jy} = \frac{n_s^2 u_y \sqrt{u_x^2 + u_y^2}}{R_h^{4/3}} \quad (2.128)$$

avec le rayon hydraulique $R_h = \frac{Bh}{B+2h}$ où B est la largeur du canal considéré et n_s le coefficient de rugosité de Manning. La méthode des volumes finis consiste à décomposer le système physique en éléments (ou cellules) plus petits qui seront considérés comme des volumes et à intégrer le système sur chacun de ces éléments. L'avantage de cette méthode réside essentiellement dans la conservation des flux traversant chacune des cellules.

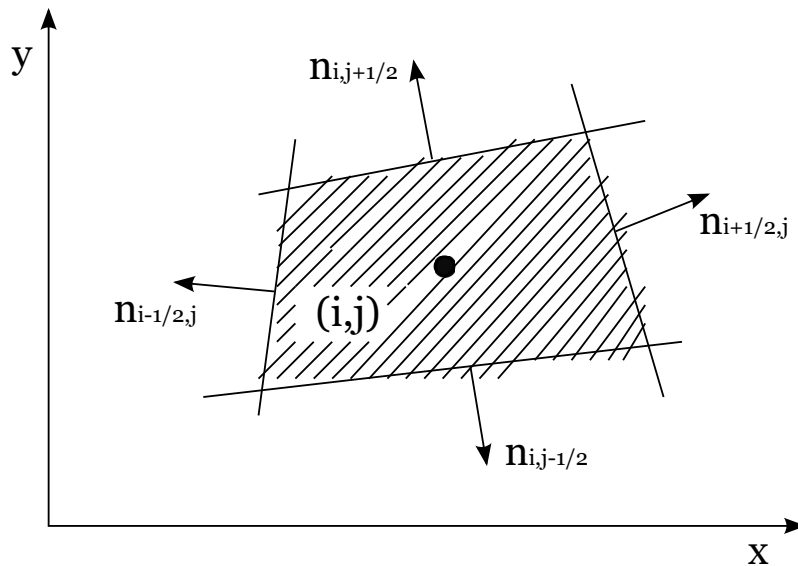


FIGURE 2.14 – Méthode des volumes finis.

L'intégration de l'équation (2.126) sur un volume donné (supposé constant) et l'application du théorème de Green permettent d'écrire,

$$\frac{\Delta \mathbf{U}_{ij}}{\Delta t} \Delta V = - \int_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_V \mathbf{S} dV, \quad (2.129)$$

avec \mathbf{n} le vecteur normal aux frontières. Ceci conduit (voir figure (2.14)), à

$$\Delta \mathbf{U} = - \frac{\Delta t}{\Delta V} \sum_{r=1}^4 (\mathbf{F}_r^* \cdot \mathbf{n}_r) dS_r + \frac{\Delta t}{\Delta V} \int_V \mathbf{S} dV. \quad (2.130)$$

Les différences entre les différentes méthodes de volumes finis interviennent dans la structure du maillage considéré lors de la discrétisation du domaine physique, mais aussi dans la détermination des flux numériques \mathbf{F}^* . Une présentation du solveur HLL développé par Harten et al. [Harten et al. \(1983\)](#), qui est un RARS⁷ (Roe's approximate Riemann solver) semble être une approche des plus intuitives permettant de calculer nos flux. On aura ainsi

$$\mathbf{F}^* \mathbf{n} = \frac{s_R F_L \mathbf{n} - s_L F_R \mathbf{n} + s_L s_R (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{s_R - s_L}, \quad (2.131)$$

avec

$$s_L = \min(u_L - \sqrt{gh_L}, u^* - \sqrt{gh^*}) \quad (2.132)$$

$$s_R = \max(u_R + \sqrt{gh_R}, u^* + \sqrt{gh^*}) \quad (2.133)$$

$$u^* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \sqrt{gh_L} - \sqrt{gh_R} \quad (2.134)$$

$$\sqrt{gh^*} = \frac{1}{2}(\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}) + \frac{1}{4}(u_L - u_R), \quad (2.135)$$

où s_L et s_R sont des vitesses de propagation, les indices L et R désignent respectivement des phénomènes considérés à gauche et à droite.

2.3.3 La méthode de collocation par points

La méthode de collocation par points est une méthode de résidus pondérés particulière, voir Chapitre 7 de [Le pourhiet \(1988\)](#). Elle se fonde sur un principe de séparation de variables et sur la recherche d'une solution approchée de la forme :

$$h_a(r, t) = \sum_{j=1}^n h_j(t) L_j(r) \quad (2.136)$$

$$Q_a(r, t) = \sum_{j=1}^n Q_j(t) L_j(r), \quad (2.137)$$

où h_a et Q_a sont les valeurs approchées des variables h et Q respectivement, h_j et Q_j sont les coefficients à déterminer, et les $L_j(r)$ désignent les n polynômes d'interpolation de Lagrange, encore appelées fonctions de forme, donnés par

$$L_j(r) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{r - r_i}{r_j - r_i}, \text{ avec } i \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.138)$$

7. Le principe de ce solveur repose sur la résolution de l'équation de Riemann.

où les r_i sont n points de discrétisation appelés points de collocation. En ces points, on oblige la solution exacte et la solution approchée à coïncider. Ces points doivent être choisis comme zéros de polynômes orthogonaux. On peut par exemple choisir les points comme les zéros du polynôme de Tchebychev d'ordre n définis par

$$r_i = \cos \left(\frac{(i-1)\pi}{N-1} \right), \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.139)$$

En notant $L_j(r_i)$ par L_{ji} , on donne

$$L_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}. \quad (2.140)$$

Pour simplifier les écritures, on note : $h_{ai} = h_a(r_i, t)$, $Q_{ai} = Q_a(r_i, t)$, $h_j(t) = h_j$ et $Q_j(t) = Q_j$. En utilisant les relations (2.94), (2.97) et (2.140), le modèle linéarisé peut s'écrire comme :

$$\partial_t \begin{pmatrix} h_{ai} \\ Q_{ai} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \sum_j Q_j \dot{L}_j(r_i) \\ b_q \sum_j Q_j \dot{L}_j(r_i) + b_h \sum_j h_j \dot{L}_j(r_i) + d_q Q_{ai} + d_h h_{ai} \end{pmatrix}, \quad (2.141)$$

avec

$$\dot{L}_j(r) = \partial_x L_j(r) = \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N (r_j - r_i)} \sum_{i=1}^N \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, k \neq j}}^n (r - r_j), \quad (2.142)$$

la dérivée spatiale de la fonction de forme.

En prenant comme vecteur d'état

$$z = \begin{bmatrix} h \\ Q \end{bmatrix} = [h_1 \quad \dots \quad h_n \quad Q_1 \quad \dots \quad Q_n]^T, \quad (2.143)$$

on peut définir un système ayant une dynamique autonome avec la matrice de dynamique définie par

$$F_{col} = \begin{pmatrix} 0_{n,n} & [a \dot{L}_{ij}] \\ [b_h \dot{L}_{ij} + d_h \delta_{ij}] & [b_q \dot{L}_{ij} + d_q \delta_{ij}] \end{pmatrix}, \quad (2.144)$$

où $[M_{ij}]$ désigne une matrice bloc avec $i, j = 1, \dots, n$, et δ_{ij} est le produit de Kronecker. En appliquant les mêmes conditions limites que celles dans la méthode de Preissmann, et en utilisant les projections utilisées pour la méthode de Boltzmann sur réseau, on peut définir un modèle d'espace d'état de la forme

$$\bar{z}^+ = A_{col} \bar{z} + B_{col} \bar{\mathbf{u}}, \quad (2.145)$$

où \bar{z} est un vecteur d'état réduit (on retire de z les états considérés comme entrées), $\bar{\mathbf{u}}$ est le vecteur des entrées (états retirés de z).

2.4 Comparaisons des méthodes

Nous reprenons dans cette section les résultats présentés dans [Pham et al. \(2010\)](#). Il s'agit d'une validation numérique comparant le modèle LB et les modèles obtenus par le schéma de Preissmann et par volumes finis. Nous nous focalisons sur la stabilité numérique, la précision et le temps de calcul numérique.

2.4.1 Scénario de simulation

Nous considérons l'écoulement dans un canal de longueur L où le débit d'entrée et la hauteur d'eau en sortie sont fixés aux valeurs Q_0 et h_0 . La solution exacte est obtenue dans ce cas en intégrant numériquement l'équation différentielle ordinaire en $h(x)$:

$$\frac{d}{dx}h = \frac{gh(x)(I - J)}{gh(x) - u(x)^2} \quad (2.146)$$

avec comme conditions limites $h(L) = h_0$ et $J = \frac{n^2 Q_0^2}{B^2 h^2 (\frac{Bh}{B+2h})^{4/3}}$, $u = \frac{Q_0}{Bh}$.

La solution exacte est calculée en utilisant le solveur *ode45* sous *Matlab*, et notée h_{ref} , voir figure 2.15.

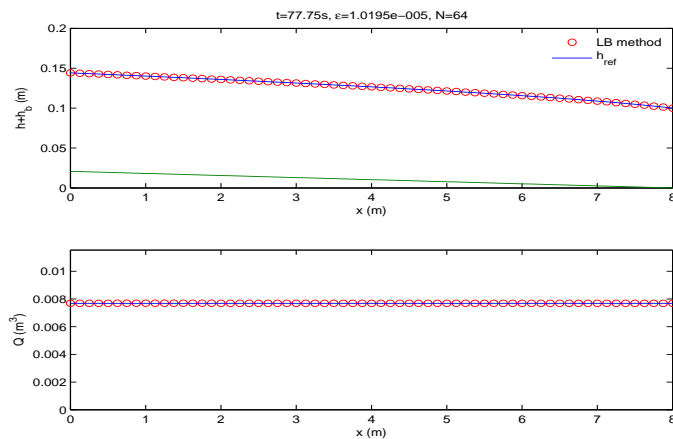


FIGURE 2.15 – État initial du système, hauteur d'eau (haut) et débit (bas).

Nous commençons la simulation avec comme condition initiale un profil uniforme d'eau $h(x, 0) = h_0$ et de débit $Q(x, 0) = Q_e$, et laissons le fluide atteindre son nouvel équilibre correspondant au nouveau débit Q . Par ailleurs, pour éviter un changement brusque de débit, le débit Q_{in} va augmenter de manière croissante entre Q_e et Q . Pour l'application numérique, nous prenons $h_0 = 0.1m$, $Q = 1.5Q_e$, $I = 2.6 \cdot 10^{-3}$, $B = 0.1m$ et $n_s = 0.0103$.

2.4.2 Résultats de simulation

Pour chacune des trois méthodes (LB, Preissmann, FV) une simulation est lancée jusqu'à ce que le fluide atteigne un nouvel état d'équilibre. Un nombre n croissant de points est utilisé pour tester la précision. Pour chaque n , le pas d'espace est défini par $\delta x = \frac{L}{n}$ et le pas de temps par $\delta t = \frac{\delta x}{v}$ où v est fixe ($v = 2$). Ces valeurs sont utilisées pour les trois méthodes. Nous considérons que la solution stationnaire h_s

est atteinte si $e < 10^{-8}$ où e est la distance relative de la hauteur d'eau entre deux profils consécutifs. Elle est calculée comme suit :

$$e = \frac{\|h(t) - h(t - \delta t)\|}{\|h(t)\|}$$

avec $\|x\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$. L'erreur relative ϵ est calculée comme suit :

$$\epsilon = \frac{\|h_s - h_{ref}\|}{\|h_{ref}\|}.$$

Le temps CPU T_{CPU} est déterminé comme le temps nécessaire pour atteindre la solution d'équilibre.

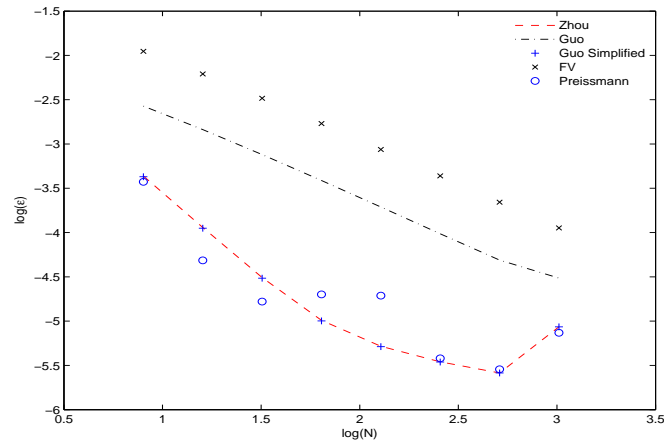


FIGURE 2.16 – Précision des différentes méthodes

Les modèles de Boltzmann sur réseau avec les termes de force de Zhou et de Guo simplifié et le modèle correspondant au schéma de Preissmann montrent une précision d'ordre 2. Le modèle de Boltzmann sur réseau avec le terme de force de Guo est précis à l'ordre 1. Enfin, le modèle obtenu par la méthode des volumes finis (modèle *FV*) est du premier ordre, mais est le moins précis, voir Fig. 2.16.

Pour tous les modèles, le temps de calcul est multiplié par 4 lorsque le nombre de points est doublé, parce que le nombre d'itérations est également doublé pour atteindre la solution stationnaire ($\delta t = \delta x/2$). Nous observons que les solveurs LB sont beaucoup plus rapides que les deux autres. Ils sont 100 fois plus rapide que les modèles obtenus par le schéma de Preissmann et environ 10 fois plus rapide que ceux obtenus avec la méthode *FV*, voir Fig. 2.17.

Enfin nous déterminons la stabilité numérique des trois méthodes. Le schéma de Preissmann est implicite et inconditionnellement stable. La région de stabilité de la méthode LB est limitée par $F_r < 1$ et $F_r < \frac{1}{\phi} - 1$. Cela peut se vérifier en simulation.

Nous considérons un canal de longueur $L = 8m$ sans pente et sans frottements. Nous imposons aux bords des conditions périodiques. Le canal est initialisé avec une bosse au milieu du bief tel que le profil de hauteur soit $h(x, 0) = h_0 + 0.1e^{\frac{(x-4)^2}{0.1}}$ avec $h_0 = 0.1m$. La vitesse initiale est fournie selon la formule $u = Fr\sqrt{gh_0}$. Le paramètre ϕ est choisi tel que la vitesse v soit ajustée et donnée par $v = \frac{\sqrt{gh_0}}{\phi}$. La simulation est faite suivant différentes valeurs de τ .

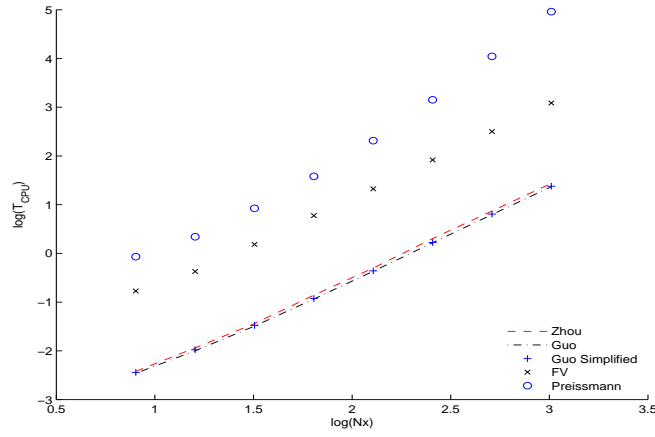


FIGURE 2.17 – Temps de calcul machine

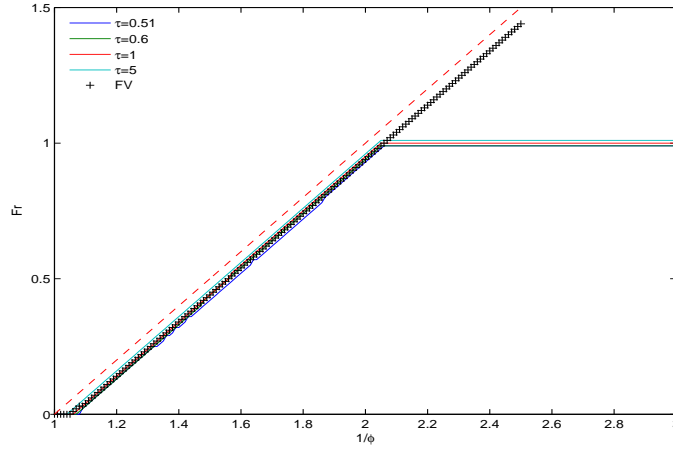


FIGURE 2.18 – Régions de stabilité de la méthode LB (lignes) et de la méthode de volumes finis (+). La condition CFL est présentée en pointillé.

La stabilité du système est testée en utilisant la notion d'entropie. Pour le système de Saint-Venant (2.93), sans pente et sans frottement, les entropies du système sont des fonctions $(h, u) \rightarrow \eta(h, u)$ telles que pour une fonction $\zeta_\eta(h, u) \rightarrow (h, u)$, appelée flux d'entropie, nous avons

$$\nabla \zeta_\eta(h, u) = \nabla \eta(h, u) F, \quad (2.147)$$

$$\nabla^2 \eta(h, u) > 0, \quad (2.148)$$

où F est la matrice Jacobienne de $\begin{pmatrix} hu \\ u^2/2 + gh \end{pmatrix}$ par rapport à h et u . Dans notre cas, et en utilisant une représentation des équations de Saint-Venant en hauteur h et vitesse u sans pente et sans frottement, on peut représenter ces fonctions par

$$\eta(h, u) = \frac{1}{2}hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \quad (2.149)$$

$$\zeta_\eta(h, u) = \frac{1}{2}hu^3 + gh^2u. \quad (2.150)$$

En utilisant ces fonctions, si nous prenons $R = \int_0^L \eta(h, u) dx$, alors nous aurons $\dot{R} = -[\zeta_\eta(h, u)]_0^L = 0$ car nous considérons des conditions périodiques aux bords.

R est donc une valeur conservative qui peut être utilisée afin de tester la stabilité du système. Le schéma discret sera considéré stable si au bout de 10000 itérations, la valeur de l'entropie n'a pas dépassé de 1% sa valeur initiale. La même procédure est appliquée pour la méthode FV , en tenant compte, cette fois, uniquement des paramètres ϕ et τ . Le résultat est présenté sur Fig. 2.18.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit la modélisation des écoulements de fluides en eaux peu profondes par la méthode de Boltzmann sur réseau. Cette modélisation permet d'aborder l'analyse des propriétés de l'automatique classique (contrôlabilité et observabilité). Après avoir mis le modèle sous forme adéquate, nous avons présenté les entrées (commande, les sorties pouvant être déduites de manière analogue) du système. Le modèle a été formulé de manière à pouvoir s'écrire dans le formalisme semi-groupe, pour faciliter son analyse ultérieure.

Nous avons également discuté des extensions au modèle en $2D$ et des résultats sur l'interconnexion entre les modèles $1D$ et les modèles $2D$. Nous avons amélioré au passage un résultat précédent sur ce type d'interconnexion par un choix judicieux des conditions aux bords.

Enfin, nous avons présenté des méthodes classiques permettant de modéliser les écoulements de fluides en eaux peu profondes. Ces méthodes sont assez utilisées dans la littérature, et servent de base de comparaison dans nos différentes expérimentations. Une première étude comparative entre ces différentes méthodes et la méthode de Boltzmann sur réseau a permis de montrer certains avantages de la méthode de Boltzmann sur réseau par rapport aux méthodes classiques.

Chapitre 3

Sur le phénomène de sédimentation

3.1 Généralités

3.1.1 Introduction

Il est fréquent dans les canaux d'irrigation d'être confronté au phénomène de sédimentation. Les origines de ce phénomène peuvent être classées en deux catégories : celles endogènes et celles exogènes.

- l'origine endogène est propre au milieu aquatique, il s'agit principalement de la production autochtone du milieu, de la croissance des plantes aquatiques, de la décomposition de la faune et de la flore (cadavres de microphytes et d'animaux) ;
- l'origine exogène vient d'un apport de matières allochtones. Celles ci peuvent provenir de charriage de matériaux à l'amont du canal, du transport par le vent de minéraux issus de l'érosion des sols et des roches, etc.

Les conséquences de ce phénomène peuvent être particulièrement négatives : obturation des vannes, estimations faussées de hauteurs, de débits et de volumes, menaces pour la sécurité de l'ouvrage et de l'environnement. Il est donc primordial de tenir compte de ce phénomène dans la modélisation des écoulements dans les canaux d'irrigation.

Nous allons présenter dans la suite de cette section, diverses modélisations et intégrations du phénomène de sédimentation dans les canaux d'irrigation. Nous discuterons notamment les divers avantages, inconvénients et hypothèses de chacune de ces modélisations.

3.1.2 La modélisation du phénomène de sédimentation par EDP

Le phénomène de sédimentation se décompose généralement en phases d'érosion, de transport et de déposition. Chacune de ces phases peut présenter ses propres nuances et nécessiter des hypothèses, dans le but de simplifier la modélisation, qui lui sont propres. On trouve notamment, dans la littérature, que la prise en compte du phénomène de sédimentation dans les écoulements en eaux peu profondes se fait en couplant, d'une part, les équations d'écoulements d'eau et, d'autre part, l'intégration des phases d'érosion, de transport et de dépôt de sédiments (voir [Graf and Altinakar](#)

(2000) et les références qui y sont). Une représentation assez utilisée est celle des équations de Saint-Venant-Exner qui pour un canal rectangulaire, tel que défini au chapitre 2, associent les équations de Saint-Venant

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \quad (3.1)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2) = gh(I - J) \quad (3.2)$$

à une équation dite d'Exner donnée par

$$(1 - p)\partial_t h_b + \partial_x q_b = 0 \quad (3.3)$$

où h_b est le profil du fond qui est dans ce cas mobile, p est la porosité du granulat du fond défini comme le rapport entre le volume de l'espace vide et le volume total et q_b est le débit solide. La pente est donnée dans ce cas par

$$I = -\partial_x h_b, \quad (3.4)$$

et le terme de frottement par

$$J = \frac{n_s u^2}{\left(\frac{Bh}{B+2h}\right)^{(4/3)}}, \quad (3.5)$$

où n_s est le coefficient de Manning. L'équation d'Exner (3.3) peut être vue comme une équation de continuité pour la phase solide. Le débit solide q_b est une fonction de la vitesse d'écoulement de l'eau u , de la hauteur h et dépend du granulat. Il est à noter que la résolution de ces équations de manière analytique peut uniquement être faite sous un certain nombre d'hypothèses qui tendent à considérer le fond peu mobile ($\partial_t h_b$ faible, Graf and Altinakar (2000)) ou en faisant l'hypothèse de la quasi-stationnarité du système. Il est donc souvent commun de considérer une résolution numérique de ces équations pour des problèmes non simples. La plupart des méthodes numériques permettant de résoudre ces équations utilisent des algorithmes itératifs résolvant tour à tour les équations de Saint-Venant en premier, puis l'équation d'Exner à la suite, Castro et al. (2008), Cordier et al. (2011), Fraccarollo et al. (2003). Cependant, cette résolution, plutôt simple, n'est pas toujours adaptée et peut être caractérisée par des conditions de stabilité CFL très contraignantes Cordier et al. (2011) (qui peuvent rallonger considérablement le temps de simulation). De ce point de vue, des résolutions numériques basées sur l'utilisation du modèle couplé présentent de meilleurs résultats (voir Castro et al. (2008), Cordier et al. (2011) et les références qui y sont). C'est d'ailleurs en comparant avec l'une de ces méthodes, que nous validerons le modèle LB 2 – *swe 1D* qui sera défini dans la suite.

Il est important de noter que dans la précédente modélisation, on suppose la séparation physique entre les phases liquide et solide, c'est à dire qu'il n'existe aucun mélange et donc pas d'échange de masse entre les différentes phases : le fond est formé uniquement de granulat et il n'y a aucune présence (ou alors cette dernière est considérée négligeable) de sédiments dans le liquide. Cependant, on remarque en réalité lors du phénomène de sédimentation, l'existence de trois phases : une phase liquide, une phase solide et une phase mixte (dite de mélange, voir Audusse et al. (2012)

et les références qui y sont). La phase liquide (respectivement solide) est composée à plus de 95% d'eau (respectivement de sédiments) alors que la phase de mélange réunit des proportions proches d'eau et de solide. Se basant sur cette observation, E. Audusse propose [Audusse et al. \(2012\)](#) de modéliser séparément les différentes phases : la phase eau pure par les équations de Saint-Venant, la phase de mélange comme un écoulement de sédiments (comme un fluide ayant une densité plus élevée que celle de l'eau due à la présence de sédiments) et la phase solide comme constituée de sédiments fixes. Les phases en écoulement (eau pure et mélange eau/sédiments) résultent de l'intégration des équations de Navier-Stokes suivant l'axe vertical en supposant la surface de sédiment fixe plane et constante. Les équations modélisant le phénomène de sédimentation sont données dans ce cas par

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \quad (3.6)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x\left(\frac{1}{2}gh^2 + hu^2\right) = -gh\partial_x h_b + \gamma_1, \quad (3.7)$$

$$\partial_t h_b + \partial_x(h_b u_b) = 0, \quad (3.8)$$

$$\partial_t(h_b u_b) + \partial_x\left(\frac{1}{2}gh_b^2 + h_b u_b^2\right) = -\frac{\rho}{\rho_b}gh_b\partial_x h + \frac{\rho}{\rho_b}\gamma_2, \quad (3.9)$$

où γ_1 et γ_2 sont des termes proportionnels aux différents termes de frottement, ρ et ρ_b sont respectivement les densités volumiques du fluide et du sédiment.

Une approche similaire, qui considère un écoulement du fluide, mais également un écoulement de sédiments peut être trouvée dans [Fraccarollo et al. \(2003\)](#) et les références qui y sont.

3.2 LB et sédimentation

La modélisation du phénomène de sédimentation avec la méthode de Boltzmann sur réseau peut être faite en considérant les différents aspects du phénomène de sédimentation. Dans cette section, nous présenterons deux modèles. Le premier modèle, dit *bi-fluide*, introduit par A. Masselot, A. Dupuis et B. Chopard [Dupuis and Chopard \(2002b\)](#), [Chopard et al. \(2000\)](#), est défini sur une approche décrivant les différentes étapes du processus de sédimentation et adapté aux cas des écoulements en eaux peu profondes par O. Marcou, [Marcou \(2009\)](#), [Marcou et al. \(2006\)](#). Ce premier modèle est réalisé en $2D$. Le second modèle, représenté en $1D$, est considéré comme un double modèle (2 modèles $1D$) d'écoulement en eaux peu profondes intégrant l'interaction entre les deux sous modèle (eau pure et sédiments en mouvement), nous l'appellerons *2 - swe 1D*.

3.2.1 Modèle bi-fluide

Comme la plupart des modèles LB, ce modèle est basé sur la définition de règles locales simples et mésoscopiques qui permettent de retrouver le comportement global du phénomène. Cette approche consiste à définir et à modéliser chacune des étapes qui constituent le phénomène de sédimentation sous forme de règles élémentaires : le transport, la déposition, l'érosion et l'effondrement.

Il est à noter que dans cette modélisation, on considère un écoulement d'eau classique auquel on ajoute des particules de sédiments. Ces particules peuvent exister

sous forme libre ou gelée. Une particule libre peut se déplacer ou s'effondrer pour devenir gelée. Une particule gelée peut être érodée, et devenir particule libre, ou rester gelée. Suivant le nombre de particules présentes sur un site, ce dernier est considéré fluide ou solide (si un seuil de particules présentes est dépassé). Les règles locales correspondant aux différentes étapes vont être présentées dans la suite.

Le transport

Cette étape définit comment au cours du temps les différentes particules se déplacent vers les différentes directions du réseau. Cette répartition peut être faite selon celle définie pour la répartition des densités du fluide. Il est à noter que lorsqu'on traite d'un nombre de particules très faible, on fait appel à des probabilités p_i de déplacement dans les différentes directions définies par, voir [Marcou \(2009\)](#)

$$p_i = \tau_s v_i \cdot (u + u_{fall}) \quad (3.10)$$

où τ_s est un coefficient lié à la probabilité de déplacement dans la direction i et u_{fall} est une vitesse dont seule la composante verticale est non nulle et qui simule la tendance naturelle des particules à s'effondrer. Dans cette modélisation, aucune différence n'est faite entre les modes de propagation des sédiments (charriage, suspension, ...), voir [Graf and Altinakar \(2000\)](#).

La déposition

C'est une étape dont la règle spécifie les conditions pour lesquelles une particule en mouvement va se déposer. Elle précise donc dans quelles circonstances une particule libre (particule en mouvement) s'effondre (pour devenir une particule gelée) et dans quel cas un site fluide (écoulement normal) devient un site solide (écoulement perturbé par l'annulation de la vitesse de déplacement d'un sédiment lors de la rencontre avec un obstacle, par exemple aux alentours d'une vanne ou d'un déversoir). Une particule libre peut donc devenir gelée soit en arrivant vers un site solide, soit parce que sa vitesse de déplacement n'est pas assez importante. On définit ainsi, pour chaque site voisin solide associée à la direction i , une proportion p_i^s de particules libres qui vont devenir gelées par

$$p_i^s = \tau_s P_{sol} v_i \cdot (u + u_{fall}) \quad (3.11)$$

où P_{sol} est une probabilité qu'une particule libre devienne gelée. Un site fluide devient solide si un seuil N_s de particules gelées est atteint.

L'érosion

C'est l'étape contraire à la déposition. Elle consiste à faire passer les particules de l'état gelé à l'état libre. Les particules gelées ont une probabilité de se muer en particules libres qui est fonction de la force du courant autour du site auquel elles appartiennent. Cette probabilité dépendra également d'une vitesse critique nommée vitesse d'érosion, qui dépend elle du type de sédiments. Cette probabilité peut être donnée par

$$p_e = P_e \sum_i^z (u(x_k + v_i \delta t, t) - U_e), \quad (3.12)$$

où P_e est une constante définissant l'importance du mécanisme d'érosion et U_e est la vitesse critique d'érosion.

L'effondrement

Cette étape permet de définir le type de profil qu'on peut avoir à la surface des sédiments en régissant la différence de particules qui peut être acceptée entre deux sites voisins. Ainsi, si un site possède un nombre de particules gelées supérieur à un seuil, l'excédent de particules est transporté vers les sites voisins. On devra également s'assurer que dans le sens vertical, le site en dessous a plus de particules que celui directement au dessus.

D'un point de vue implémentation, on tiendra également compte de l'initialisation (création de particules au départ de la simulation). De plus amples détails sur ces différentes étapes ainsi que des validations de divers scénarios de simulation peuvent être consultés dans [Marcou \(2009\)](#).

Ce modèle, validé expérimentalement sur le micro-canal de Valence¹ en tenant compte d'une certaine ressemblance entre les formes des profils expérimentaux et les formes des profils obtenus en simulation, peut s'avérer lourd pour des simulation dans des réseaux interconnectés complexes. D'autre part, en tenant compte des constats faits par O. Marcou dans [Marcou \(2009\)](#) sur les difficultés à faire coïncider les profils en simulation avec les profils expérimentaux. On propose ici de définir un modèle en $1D$ (moins gourmand d'un point de vue simulation) qui sera validé numériquement en utilisant une méthode de type volumes finis adaptée à la résolution des équations de Saint-Venant-Exner [Castro et al. \(2008\)](#), [Cordier et al. \(2011\)](#).

3.2.2 Modèle 2 – *swe* 1D

La modélisation du phénomène de sédimentation avec la méthode de Boltzmann sur réseau en utilisant une approche dite 2 – *swe* 1D peut se baser sur les mêmes hypothèses que celles utilisées dans les travaux d'E. Audusse et al., voir [Audusse et al. \(2012\)](#). On suppose que le phénomène peut être régi par trois lois : une loi pour l'eau pure, une loi pour les sédiments en mouvement et une dernière loi pour les sédiments fixes, voir Fig. 3.1.

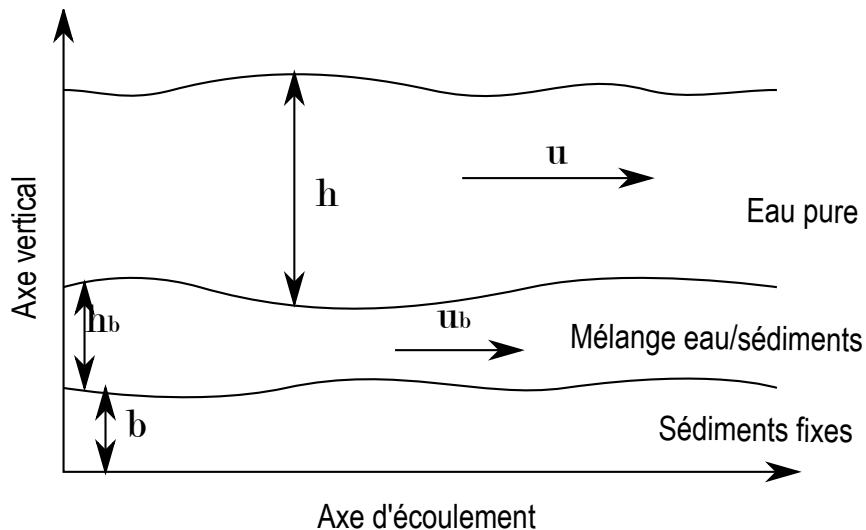


FIGURE 3.1 – Phénomène de sédimentation, 3 régions

La partie fluide :

Elle est définie par la méthode de Boltzmann sur réseau permettant de décrire les

1. L'ensemble des caractéristiques de ce micro-canal sont présentées en annexe.

écoulements en eaux peu profondes d'un fluide dans un canal d'irrigation ouvert (voir chapitre 2). Nous avons ainsi pour un réseau $D1Q3$:

$$f_i(r + v_i\delta, t + \delta t) = f_i(r, t) + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i) \quad (3.13)$$

où $i \in 0, 1, 2$, v_i est la vitesse du réseau, r le site et δt le pas de temps. Les distributions d'équilibre local vérifient

$$\sum_i f_i^{eq} = h, \quad (3.14)$$

$$\sum_i v_i f_i^{eq} = hu, \quad (3.15)$$

$$\sum_i v_i^2 f_i^{eq} = \frac{1}{2}gh^2 + hu^2, \quad (3.16)$$

où les f_i^{eq} représentent les distributions d'équilibre local du fluide se déplaçant dans la direction i .

Les sédiments en mouvement :

La modélisation de l'écoulement des sédiments est faite sur les mêmes bases que celui du fluide. Le modèle est ainsi défini par une itération des phases de collision et de propagation. Les densités de distribution résultant de la phase de collision sont notées $f_i^{b_{out}}$ et celles résultant de la phase de propagation sont notées $f_i^{b_{in}}$. Ces phases peuvent être représentées par

$$f_i^{b_{out}}(r, t) = f_i^{b_{in}}(r, t) + \Omega_i^b(f^b(r, t)) \quad (\text{Collision}) \quad (3.17)$$

$$f_i^{b_{in}}(r + v_i\delta t, t + \delta t) = f_i^{b_{out}}(r, t) \quad (\text{Propagation}), \quad (3.18)$$

où r représente le site, v_i la vitesse d'écoulement du réseau et Ω_i^b le terme de collision qui peut être de modèle BGK comme dans le cas des fluides. Il est possible de combiner les équations (3.17-3.18) pour obtenir

$$f_i^{b_{in}}(r + v_i\delta t, t + \delta t) = f_i^{b_{in}}(r, t) + \Omega_i^b(f^b(r, t)), \quad (3.19)$$

où $f_b(r, t)$ représente le vecteur de toutes les distributions au site et au temps considéré. Si nous notons $f_i^{b_{in}}$ par f_i^b (notation que nous garderons pour la suite), le terme de collision peut être donné par

$$\Omega_i^b = \frac{1}{\tau_b}(f_i^b - f_i^{b_{eq}}) \quad (3.20)$$

avec τ_b le temps de relaxation, propre au sédiment, et $f_i^{b_{eq}}$ les densités de distribution d'équilibre. Ces dernières ainsi que les densités f_i^b doivent vérifier à chaque instant et pour chaque site :

$$\sum_i f_i^b = \sum_i f_i^{b_{eq}} = h_b, \quad (3.21)$$

$$\sum_i v_i f_i^b = \sum_i v_i f_i^{b_{eq}} = q_b, \quad (3.22)$$

$$\sum_i v_i^2 f_i^b = \sum_i v_i^2 f_i^{b_{eq}} = \Pi_b, \quad (3.23)$$

où h_b est la quantité de matière de sédiments, q_b est la quantité de mouvement (moment d'ordre 1) correspondant et Π_b est le moment d'ordre 2. Ces paramètres peuvent être donnés par

$$q_b = h_b u_b \quad (3.24)$$

et

$$\Pi_b = \frac{1}{2} g h_b^2 + h_b u_b^2. \quad (3.25)$$

En utilisant le développement de Chapman-Enskog², on peut écrire

$$\partial_t h_b + \partial_x (h_b u_b) = 0, \quad (3.26)$$

$$\partial_t (h_b u_b) + \partial_x (\Pi_b) = \Gamma_b, \quad (3.27)$$

où Π_b est le moment d'ordre 2 défini par (3.25) et Γ_b est un terme de viscosité. Il est montré que ce terme converge vers le terme de viscosité standard des fluides lorsque $h_b \rightarrow 0$ et $u_b \rightarrow 0$, voir [Pham et al. \(2010\)](#).

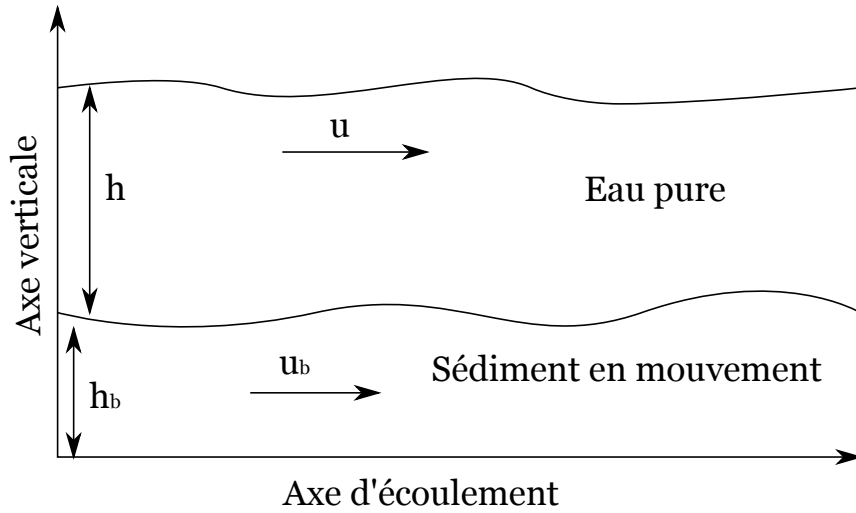


FIGURE 3.2 – Phénomène de sédimentation, 2 régions.

La prise en compte des termes de force :

Pour la prise en compte des termes source ou termes de force dans ce modèle, nous supposons que la base de la partie constituée de sédiments fixe est plane et constante (sans pente), voir Fig. (3.2). Le terme de force dans la partie eau pure peut être donné par les différents termes proposés dans le chapitre 1, où le terme de pente sera remplacé par le gradient du lit de sédiments ($\partial_x h_b$). Pour la partie sédiments en mouvement, le terme de force peut être donné par

$$F_b = -\frac{\tau}{\tau_b} g h_b \partial_x h + \frac{\tau}{\tau_b} \gamma_2, \quad (3.28)$$

où τ et τ_b représentent, respectivement, les temps de relaxation des parties eau pure et sédiments en mouvement, γ_2 est proportionnel à un terme de frottement. En incorporant les différents termes de force (par simplicité, nous utilisons des termes

². Voir en annexe

de force simple défini dans le chapitre 1), les équations de Boltzmann sur réseau représentant le phénomène de sédimentation peuvent être donnés par

$$f_i(r + v_i \delta t, t + \delta t) = f_i^b(r, t) + \Omega_i(f(r, t)) + \omega_i \frac{\delta t}{c_s^2} v_i F, \quad (3.29)$$

$$f_i^b(r + v_i \delta t, t + \delta t) = f_i^b(r, t) + \Omega_i^b(f^b(r, t)) + \omega_i \frac{\delta t}{c_s^2} v_i F_b \quad (3.30)$$

où les paramètres c_s^2 , v_i , ω_i sont propre au réseau et ont été définis précédemment. On peut vérifier aisément, en utilisant le développement de Chapman-Enskog, que le modèle ainsi défini est bien équivalent à des termes de viscosité près aux équations données par

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \quad (3.31)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x\left(\frac{1}{2}gh^2 + hu^2\right) = -gh\partial_x h_b, \quad (3.32)$$

$$\partial_t h_b + \partial_x(h_b u_b) = 0, \quad (3.33)$$

$$\partial_t(h_b u_b) + \partial_x\left(\frac{1}{2}gh_b^2 + h_b u_b^2\right) = -\frac{\tau}{\tau_b} gh_b \partial_x h \quad (3.34)$$

qui sont équivalentes aux équations du modèle d'E. Audusse (3.6)-(3.9) lorsqu'on considère des termes de frottement nuls avec le rapport $\frac{\tau}{\tau_b} = \frac{\rho}{\rho_b}$ où ρ est la masse volumique de l'eau pure et ρ_b celle du granulat des sédiments considérés.

3.3 Validation et expérimentations

Dans cette section, nous allons présenter des travaux permettant de valider le modèle au travers de quelques scénarios. Nous tenons à rappeler que la résolution analytique des équations de Saint-Venant-Exner est impossible dans le cas général. Cette résolution peut cependant être faite lorsque l'on considère certaines simplifications ($\partial_t h_b \simeq 0$, $\partial_t u \simeq 0$), notamment en régime stationnaire ou quasi-stationnaire, Graf and Altinakar (2000). Lorsqu'on ne considère pas ces simplifications, la résolution numérique est alors nécessaire. Les méthodes numériques usuelles, présentées notamment au chapitre 2, deviennent assez complexes et peuvent présenter des instabilités Audusse et al. (2012), Castro et al. (2008), Cordier et al. (2011), Fraccarollo et al. (2003). Nous présenterons dans la suite une méthode de volumes finis adaptée à cette résolution numérique des équations de Saint-Venant-Exner.

La validation du modèle de Boltzmann sur réseau sera faite numériquement. Nous comparerons les résultats obtenus avec cette méthode avec des solutions analytiques et les résultats obtenus avec la méthode des volumes finis.

La validation du modèle LB va être faite en examinant la convergence vers des profils analytiques ou vers des solutions bien définies dans la littérature. Pour cela, nous considérerons différents scénarios particuliers. Nous nous intéresserons notamment à la convergence vers un profil analytique en régime stationnaire, à la convergence vers différents profils et au cas de ruptures de barrage.

3.3.1 Méthode des volumes finis (Castro et al. (2008), Cordier et al. (2011))

Nous présenterons dans la suite une méthode des volumes finis adaptée à la résolution numérique des équations de Saint-Venant-Exner. Nous considérons les équations de Saint-Venant-Exner³ définies par

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \quad (3.35)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2) = gh(I - J) \quad (3.36)$$

$$\partial_t h_b + \zeta \partial_x q_b = 0 \quad (3.37)$$

avec les variables h , h_b , u , q_b déjà définies et $\zeta = (1 - p)^{-1}$ où p est la porosité du granulat constituant les sédiments. Ces équations peuvent être écrites sous la forme d'équations de bilan

$$\partial_t U + \partial_x \mathbf{F}(U) = \mathbf{B} \partial_x U \quad (3.38)$$

avec

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ h_b \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{F}(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ \zeta q_b \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

et

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -gh \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

On peut également écrire

$$\partial_t U + \mathbf{A}(U) \partial_x U = 0 \quad (3.42)$$

avec

$$\mathbf{A}(U) = D_U \mathbf{F}(U) - \mathbf{B} \quad (3.43)$$

où $D_U \mathbf{F}(U)$ est la matrice Jacobienne de $\mathbf{F}(U)$ par rapport à U . Il est à noter que q_b est généralement une fonction de h et de u de sorte que si on considère le modèle de Grass⁴ ($q_b = A_g u |u|^{m_g - 1}$) et que l'on prend $\zeta = 1$, on peut écrire

$$\partial_h q_b = -u \partial_q q_b \quad (3.44)$$

avec $q = hu$, Cordier et al. (2011). Le schéma numérique des volumes finis peut alors être défini par

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\delta t}{\delta x} \left(\mathbf{A}_{i-1/2}^+(U_i^n - U_{i-1}^n) + \mathbf{A}_{i+1/2}^-(U_{i+1}^n - U_i^n) \right) \quad (3.45)$$

3. La validation est faite pour montrer une convergence vers le modèle de Saint-Venant-Exner qui reste le modèle le plus utilisé par les ingénieurs, et en quelque sorte le modèle de référence.

4. Nous rappelons ici que la détermination du débit q_b est faite de manière empirique et divers modèles existent pour l'évaluer Graf and Altinakar (2000). Le modèle de Grass introduit dans Grass (1981), sera utilisé dans cette étude pour la conformité aux résultats connus dans la littérature qui serviront de comparaison.

avec

$$\mathbf{A}_{i+1/2}^{\pm} = \frac{\mathbf{A}_{i+1/2} \pm |\mathbf{A}_{i+1/2}|}{2}, \quad (3.46)$$

où $\mathbf{A}_{i+1/2}$ est une matrice de Roe⁵ (voir Fraccarollo et al. (2003), Roe (1981)) correspondant aux équations (3.35-3.37) donnée par

$$\mathbf{A}_{i+1/2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ gh_{i+1/2}^n - (u_{i+1/2}^n)^2 & 2u_{i+1/2}^n & gh_{i+1/2}^n \\ -u_{i+1/2}^n b_{i+1/2}^n & b_{i+1/2}^n & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

et

$$h_{i+1/2} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \quad (3.48)$$

$$u_{i+1/2} = \frac{\sqrt{h_i}u_i + \sqrt{h_{i+1}}u_{i+1}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_{i+1}}} \quad (3.49)$$

$$b_{i+1/2} = \zeta \frac{A_g (\sqrt{h_i} + \sqrt{h_{i+1}})}{\sqrt{h_i}h_{i+1} + \sqrt{h_{i+1}}h_i} \sum_{k=0}^{m_g-1} (u_{i+1})^k (u_i)^{m_g-1-k}. \quad (3.50)$$

Il est à noter que d'un point de vue implémentation, nous utiliserons les fonctions de flux réels $\mathbf{F}(U)$ comme⁶ proposé par M. J. Castro dans Castro et al. (2008). Le modèle numérique des volumes finis ainsi définie (qui représente un modèle couplé de l'écoulement de fluide et des sédiments) présente plus de stabilité que les modèles basés sur une résolution alternative des équations de Saint-Venant seules, puis de l'équation d'Exner à chaque itération, Cordier et al. (2011). La stabilité est, en effet donnée par la condition de Courant-Friedrich-Levy (*CFL*)

$$(|u| + \sqrt{gh}) \delta t < \delta x. \quad (3.51)$$

3.3.2 Solutions en régime stationnaire

Nous considérons le phénomène de sédimentation représenté par le modèle d'E. Audusse (3.6)-(3.9) pour lequel une convergence du modèle 2 – *swe 1D* a été établi. En régime stationnaire, ces équations se réduisent à

$$\partial_x(hu) = 0, \quad (3.52)$$

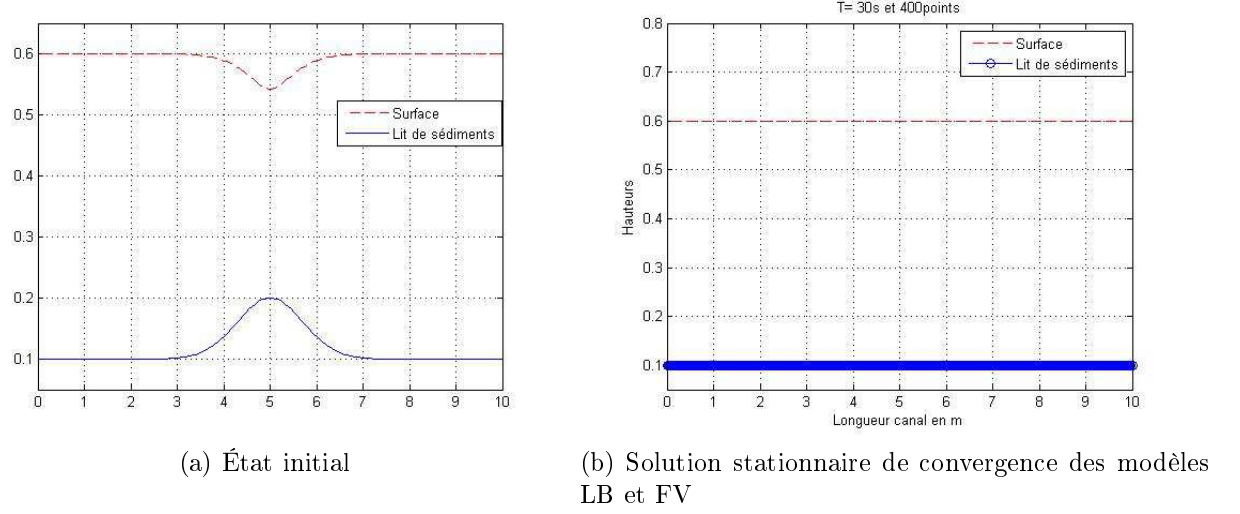
$$\partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh\partial_x h_b, \quad (3.53)$$

$$\partial_x(h_b u_b) = 0, \quad (3.54)$$

$$\partial_x(h_b u_b^2 + gh_b^2/2) = -gh_b \partial_x h, \quad (3.55)$$

5. La matrice de Roe est une matrice dont la définition permet de résoudre un problème de Riemann. La méthode de Roe (on parle de *RARS* pour *Roe Approximate Riemann Solver*) est basée autour du schéma de Godunov (voir Fraccarollo et al. (2003) et les références qui y sont) et permet de déterminer une estimation du flux numérique intercellulaire ou du flux de Godunov $\mathbf{F}_{i+1/2}$ à l'interface entre deux cellules de calcul U_i et U_{i+1} pris dans un domaine de discrétisation spatio-temporel.

6. On utilise plutôt $U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\delta t}{2\delta x} (G_{i-1/2} - G_{i+1/2}) + \frac{\delta t}{2\delta x} (\mathbf{B}_{i-1/2}(U_i^n - U_{i-1}^n) + \mathbf{B}_{i+1/2}(U_{i+1}^n - U_i^n))$ où $\mathbf{G}_{i+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}(U_i^n) + \mathbf{F}(U_{i+1}^n)) - \frac{1}{2} |\mathbf{A}_{i+1/2}(U_{i+1}^n - U_i^n)|$.


 FIGURE 3.3 – Évaluation des profils stationnaires des modèles *FV* et *2swe 1D*.

et permettent de conclure que le régime stationnaire sera atteint si $\partial_x(h + h_b) = 0$ (une réduction des équations (3.53) et (3.55) en utilisant les équations (3.52) et (3.54)) et si les différents débits sont uniformes (q et q_b). Il est à noter que ce résultat est aussi valable pour les modèles avec les équations de Saint-Venant-Exner (3.1)-(3.3).

Nous présentons ici quelques résultats de simulation d'un scénario en utilisant le modèle de Saint-Venant-Exner (résolu numériquement avec la méthode des volumes finis) et le modèle $2 - swe - 1D$.

On considère un canal rectangulaire de section constante et de longueur L . Le domaine est discrétisé sur 400 sites. Les conditions limites sont définies telles que l'on suppose un prolongement aux frontières (conditions de type Neumann homogènes aux bords, ou sites miroirs aux bords dans le cas de la méthode LB). Les conditions initiales sont définies par

$$\begin{cases} hu(x, 0) &= 0.5, \\ h_b(x, 0) &= 0.1 \left(1 + e^{-(x-L/2)^2} \right), \\ u^2/2 + g(h + h_b) &= 6.386. \end{cases} \quad (3.56)$$

et représentées sur Fig. 3.3a.

Pour le modèle de Saint-Venant-Exner, la détermination du débit q_b est donné par le modèle de Grass avec $m_g = 3$

$$q_b = A_g u^3 \quad (3.57)$$

où l'on prend $A_g = 0.05$. On peut noter que les modèles Saint-Venant-Exner et $2 - swe - 1D$ convergent vers la même solution stationnaire, Fig 3.3b. La condition CFL est satisfaite pour $\delta t = \delta x/4$.

Nous avons relevé quelques états intermédiaires de la dynamique lors de la simulation avec la méthode des volumes finis, Fig 3.4.

Nous notons que la dynamique du modèle de Boltzmann sur réseau défini avec (3.21)-(3.23) est différente de celle obtenue par la méthode de volumes finis, voir

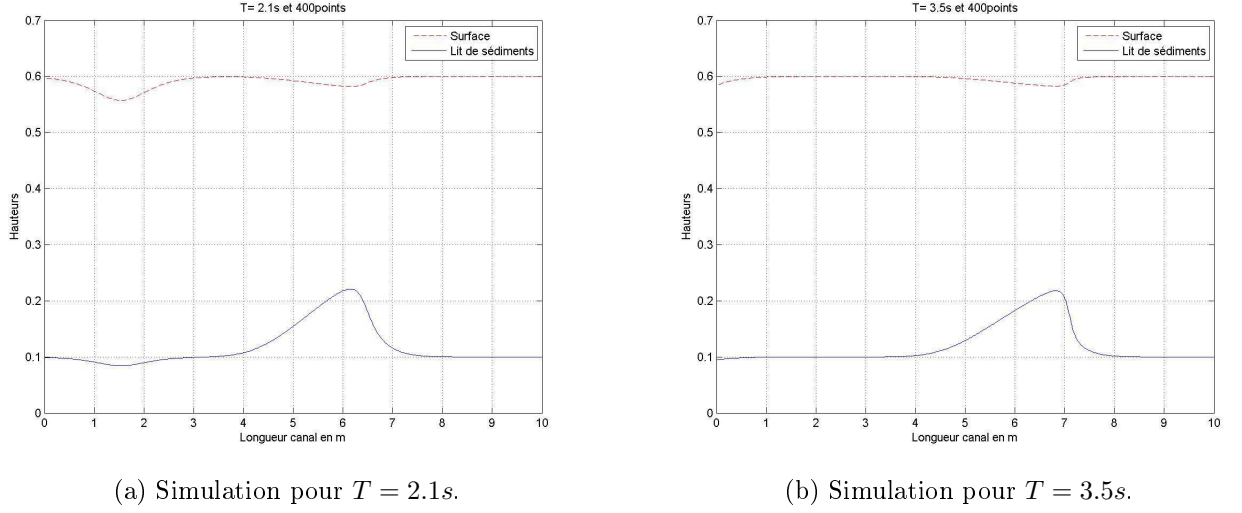


FIGURE 3.4 – Les profils obtenus avec le modèle FV pour une discrétisation sur 400 sites pour différents temps, [Cordier et al. \(2011\)](#).

Fig. 3.5. Ces courbes sont obtenues avec $\tau = 1.2$ et $\tau_b = 15\tau$, en considérant des temps de relaxation τ_b plus petits, les divergences sont amplifiées.

Pour palier à cela, nous redéfinissons le modèle en utilisant le débit q_b défini avec le modèle de Grass ($q_b = A_g u |u|^{m_g - 1}$) qui est utilisé dans le modèle des volumes finis. Cela conduit à déterminer les distributions d'équilibre $f_i^{b_{eq}}$ vérifiant

$$\sum_i f_i^b = \sum_i f_i^{b_{eq}} = h_b \quad (3.58)$$

$$\sum_i v_i f_i^b = \sum_i v_i f_i^{b_{eq}} = q_b \quad (3.59)$$

$$\sum_i v_i^2 f_i^b = \sum_i v_i^2 f_i^{b_{eq}} = \left(\frac{q_b^2}{h_b} + g \frac{h_b^2}{2} \right) \quad (3.60)$$

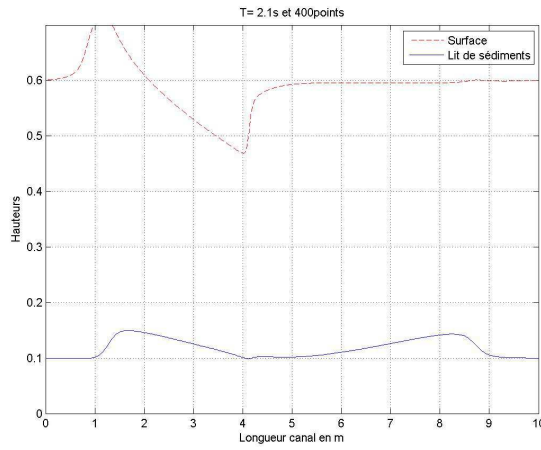
En utilisant le modèle LB ainsi défini, on retrouve une dynamique similaire de celle obtenue avec la méthode des volumes finis, Fig 3.6. On note toutefois une légère différence entre les deux modèles (le déplacement des sédiments paraît plus accentué avec le modèle des volumes finis qu'avec le modèle LB).

En effet, en plus du paramètre A_g (qui influence le débit q_b), on notera que pour la méthode LB le temps de relaxation τ_b influence sa dynamique. Nous ne sommes cependant pas parvenu à annuler la différence entre les dynamiques comme on peut le remarquer sur les figures présentées.

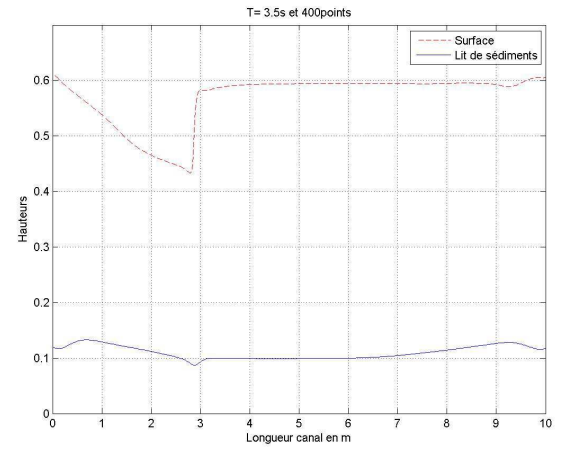
Nous terminons cette sous-section par une présentation des résultats sur le temps nécessaire en simulation pour converger vers la solution stationnaire. Nous notons h_{ref} et $h_{b,ref}$ les profils de hauteurs d'eau et de sédiments en régime stationnaire. Nous considérons que ce régime sera atteint si $e < 10^{-8}$ où e est donnée par

$$e = \max \left\{ \frac{\|\max(h(t)) - h(t)\|}{\max(h(t))}, \frac{\|\max(h_b(t)) - h_b(t)\|}{\max(h(t))} \right\},$$

avec $\|x\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$. En tenant compte de la condition CFL (3.51), la vitesse du réseau v dans le cas de la méthode LB est donnée par $v = 4$ ($\delta t = \delta x/4$). La

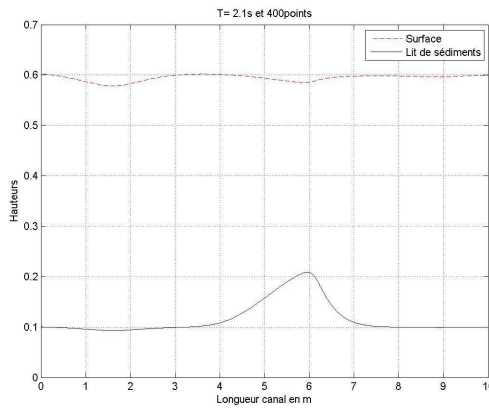


(a) Simulation pour $T = 2.1s$.

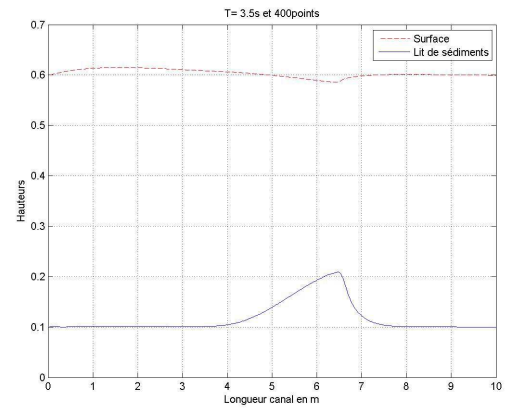


(b) Simulation pour $T = 3.5s$

FIGURE 3.5 – Les profils obtenus avec le modèle 2 – *swe 1D* avec le modèle (3.21)-(3.23).



(a) Simulation pour $T = 2.1s$.



(b) Simulation pour $T = 3.5s$.

FIGURE 3.6 – Les profils obtenus avec le modèle LB (2*swe 1D*) pour une discrétisation sur 400 sites pour différents temps.

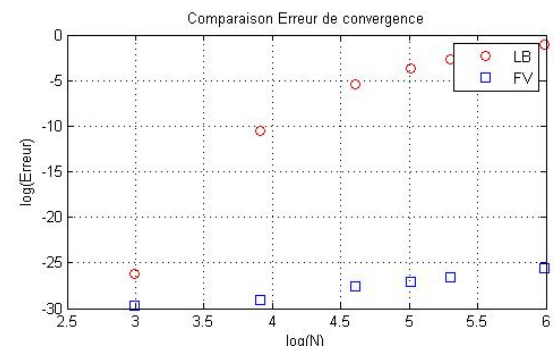
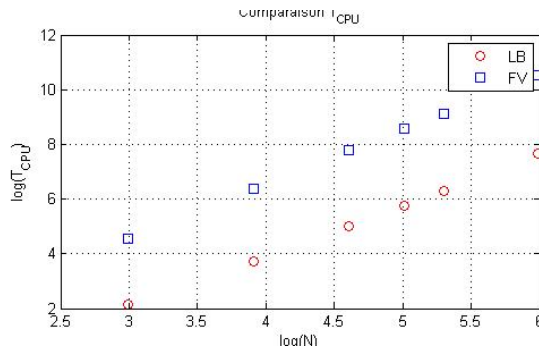


FIGURE 3.7 – Temps de calcul nécessaire pour atteindre l'état stationnaire en fonction du nombre de sites.

simulation est faite en faisant varier le nombre de sites considérés. Les résultats sont présentés sur Fig. 3.7. On note que pour un nombre de sites peu élevé, le temps CPU du modèle LB est beaucoup plus petit que celui de la méthode des volumes finis. Quand le nombre de site augmente, la différence dans la dynamique, remarquée plus haut, entre les deux méthodes entraîne un temps de calcul plus grand dans la méthode LB.

3.3.3 États d'équilibre avec le modèle LB

Nous présentons dans cette sous-section, deux scénarios où l'on s'intéresse à l'influence du paramètre A_g sur les profils de sédiments obtenus lorsque le modèle LB (2 – *swe1D*) tend vers l'équilibre. On évalue notamment cette influence sur deux scénarios. On considère des conditions limites de type Neumann homogènes aux bords.

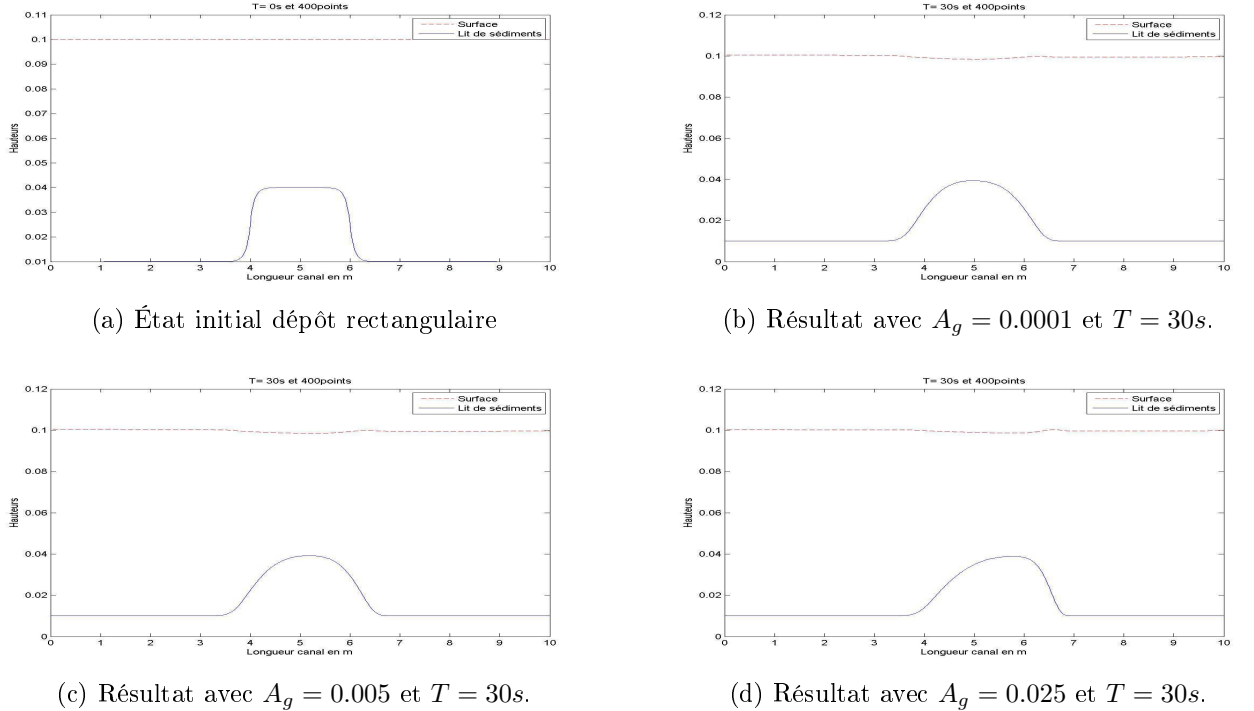


FIGURE 3.8 – Résultats de simulation du scénario 1 pour différents A_g .

Pour le scénario 1, on considère un profil de sédiments avec un dépôt rectangulaire (arrondi aux angles pour éviter l'apparition de chocs) en son milieu de longueur $2m$, voir Fig 3.8a. Ces conditions initiales sont définies ci-dessous :

$$h_b(x, 0) + h(x, 0) = 0.1, \quad \forall 0 \leq x \leq L \quad (3.61)$$

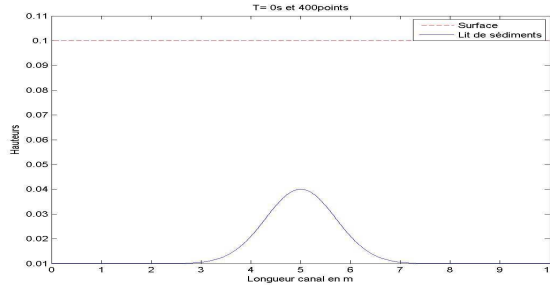
$$q(x, 0) = 0.025, \quad \forall 0 \leq x \leq L. \quad (3.62)$$

Les résultats pour différentes valeurs du paramètre A_g sont présentées sur les Fig. 3.8b-3.8d. On notera que plus cette valeur est élevée, plus le tas de sédiments se déplace.

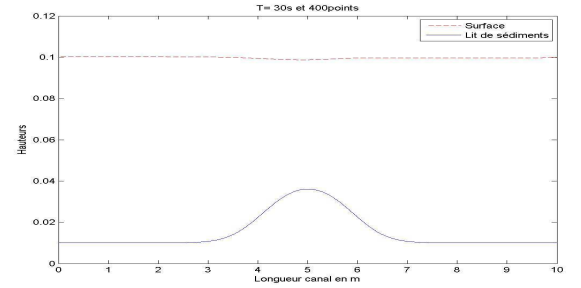
Pour le deuxième scénario, on considère cette fois le profil de sédiments initialement défini par,

$$h_b(x, 0) = 0.01 \left(1 + 3e^{-(x-L/2)^2} \right), \quad \forall 0 \leq x \leq L, \quad (3.63)$$

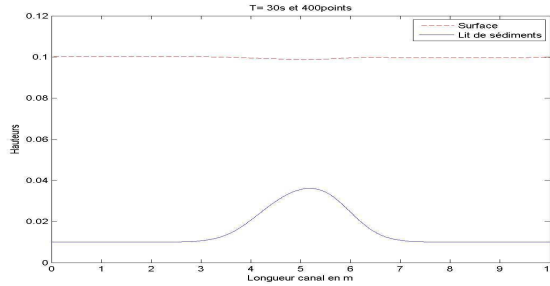
avec h et q définis en (3.61)-(3.62). Cet état initial est représenté sur la Fig. 3.9a. Comme pour le premier scénario, on remarque que la vitesse de déplacement du tas de sédiments est corrélée à l'augmentation du paramètre A_g . Les résultats sont présentés sur Fig. 3.9b-3.9d. Il est donc possible (quitte à procéder de manière empirique) de faire tendre les profils LB vers les profils souhaités.



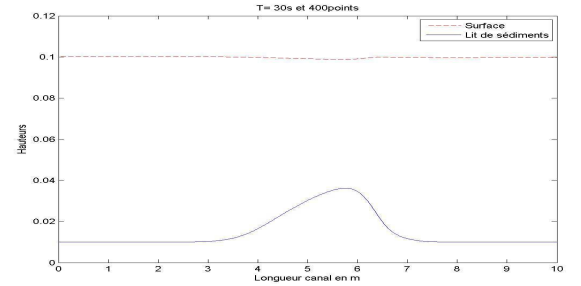
(a) État initial profil sédiment en bosse



(b) Résultat avec $A_g = 0.0001$ et $T = 30s$.



(c) Résultats avec $A_g = 0.005$ et $T = 30s$.



(d) Résultats avec $A_g = 0.025$ et $T = 30s$.

FIGURE 3.9 – Résultats de simulation du scénario 2 pour différents A_g .

3.3.4 Cas d'une rupture de barrage

Nous terminons cette partie numérique par une discussion et un test qui simule des régions de vitesses différentes. Nous considérons le système initialement défini par, voir [Cordier et al. \(2011\)](#)

$$\begin{cases} hu(x, 0) &= 0.6 \\ h_b(x, 0) &= 0.1 \left(1 + e^{-(x-L/2)^2} \right), \\ h(x, 0) + h_b(x, 0) &= 0.4. \end{cases} \quad (3.64)$$

La partie fluide (sans sédiments) est simulée jusqu'à atteindre un équilibre donné, voir Fig 3.10. Cet équilibre est atteint avec un débit hu constant, et l'on note l'établissement de deux régimes d'écoulements dans le canal : une petite vitesse ($u < \sqrt{gh}$), correspondant à un écoulement fluvial, en amont du canal et une

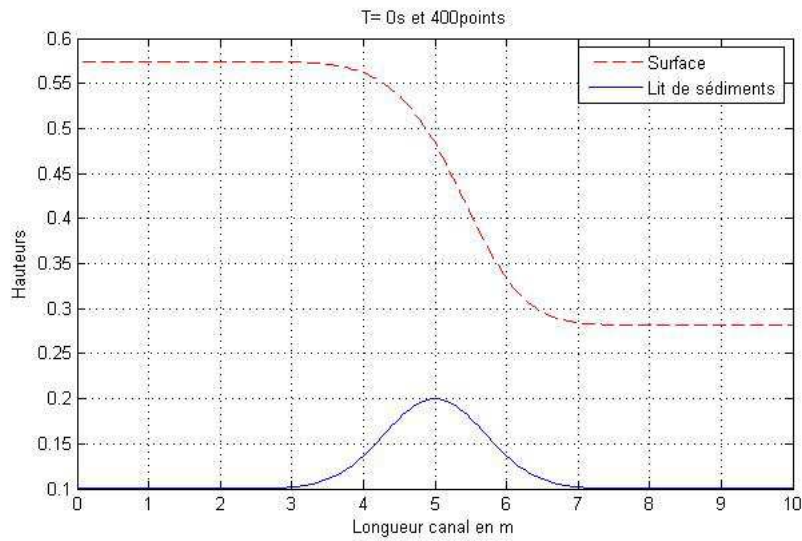
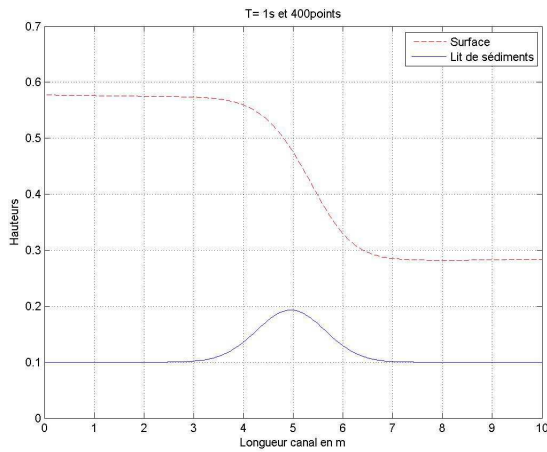
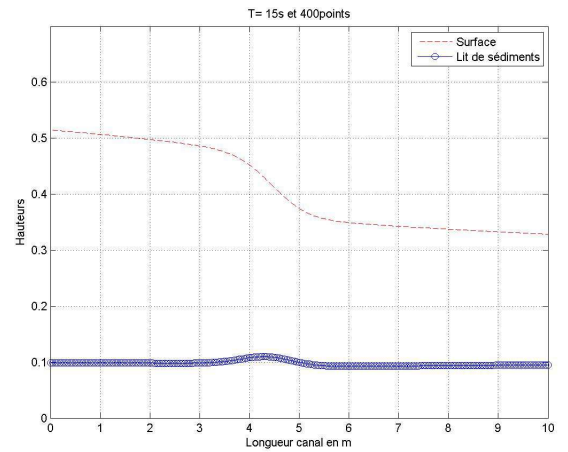


FIGURE 3.10 – État d'équilibre obtenu après simulation du système initial donné par (3.64). Cet état constituera le profil initial de la rupture de barrage.

plus grande ($u > \sqrt{gh}$), correspondant à un écoulement torrentiel, en aval⁷. Une simulation en utilisant la méthode des volumes finis est faite, voir Fig. 3.11 avec $A_g = 0.001$ où l'on considère le modèle de Grass pour la détermination du débit q_b .



(a) Simulation au bout d'une seconde.



(b) Simulation pour $t = 15s$.

FIGURE 3.11 – Profils obtenus avec la méthode des volumes finis

Il est à noter que la méthode de Boltzmann sur réseau telle que nous l'avons définie (réseau symétrique) est uniquement adaptée aux écoulements fluviaux (où le nombre de Froude $F_r < 1$). Pour cela nous ne pouvons utiliser le précédent algorithme et redéfinissons la partie écoulement eau pure en utilisant un réseau asymétrique.

7. Ce type de configuration est généralement rencontré de part et d'autre d'un barrage. La simulation consiste à supposer que le barrage est rompu.

Le modèle asymétrique est défini, voir [Chopard et al. \(2011\)](#), en utilisant le schéma de la figure Fig. 3.12 où les vitesses sont données par

$$v_0 = v, v_1 = 3v, v_2 = -v. \quad (3.65)$$

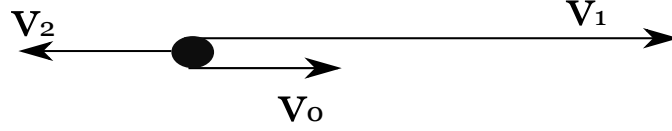


FIGURE 3.12 – Réseau $D1Q3$ asymétrique avec $v_0 = v$, $v_1 = 3v$ et $v_2 = -v$.

En utilisant les vitesses définies en (3.65), les fonctions d'équilibre local sont données par

$$f_0^{eq} = \frac{3}{4}h - \frac{1}{4v^2} \left(\frac{1}{2}gh^2 + hu^2 \right) + \frac{1}{2v}hu, \quad (3.66)$$

$$f_1^{eq} = -\frac{1}{8}h + \frac{1}{8v^2} \left(\frac{1}{2}gh^2 + hu^2 \right), \quad (3.67)$$

$$f_2^{eq} = \frac{3}{8}h + \frac{1}{8v^2} \left(\frac{1}{2}gh^2 + hu^2 \right) - \frac{1}{2v}hu. \quad (3.68)$$

Les expressions (3.66)-(3.68), ainsi que la dynamique de la méthode LB (3.13) et

$$h = \sum_i f_i, \quad hu = \sum_i v_i f_i$$

définissent le modèle LB 1D asymétrique pour les écoulements en eaux peu profondes. Il est à noter que ce modèle permet de considérer des écoulements avec un nombre de Froude $F_r \geq 1$ et donc les écoulements sur-critiques, ainsi que les phases de transition ($F_r = 1$). En utilisant ce modèle, les résultats de simulation pour $A_g = 0.001$ sont donnés sur les figures Fig 3.13a-3.13b. On note que ce modèle LB permet de reproduire un déplacement rapide des sédiments. Les simulations laissent par ailleurs envisager l'obtention de profils plus proches de la réalité avec la méthode LB qu'avec la méthode des volumes finis. On remarque, en effet, que dans la simulation avec la méthode des volumes finis, l'affaissement de l'eau en amont se fait de manière graduée (à la manière d'une ouverture progressive d'une vanne entre les 2 régimes d'écoulement), alors que dans la simulation avec la méthode LB, on a bien un affaissement se rapprochant d'une rupture de barrage.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons discuté de la modélisation du phénomène de sédimentation avec la méthode de Boltzmann sur réseau. Nous avons rappelé les équations de Saint-Venant-Exner qui sont couramment utilisées par les ingénieurs pour modéliser le phénomène de sédimentation. Nous avons également rappelé un algorithme de sédimentation basé sur une modélisation 2D introduit par A. Masselot, A. Dupuis et B. Chopard et adapté dans le cas des écoulements en eaux peu profondes par O. Marcou. En utilisant une modélisation à plusieurs lois, qui dépend

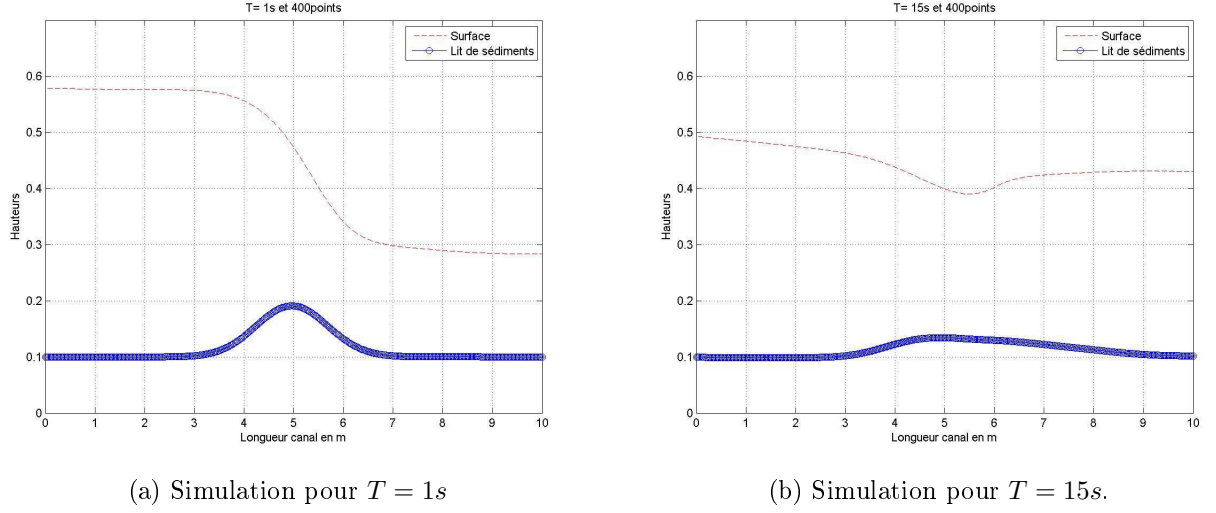


FIGURE 3.13 – Simulation transport de sédiments avec le modèle LB 1D asymétrique.

des phénomènes considérés (eau, sédiments mobiles, fond fixe), nous avons défini un modèle 1D de Boltzmann sur réseau représentant les phénomènes de sédimentation. Ce modèle est basé sur la définition de plusieurs lois dans un écoulement, chacune d'entre elle définissant un type d'écoulement (eau pure et transport de sédiment). Ce concept multi-lois a été notamment utilisé par E. Audusse et ses collaborateurs.

Nous avons validé numériquement notre modèle sur des scénarios bien connus dans la littérature où l'on s'est intéressé à la dynamique, à la stabilité et à la solution stationnaire. Nous avons montré que les modèles de Boltzmann sur réseau avaient un comportement similaire à celui des modèles définis en utilisant un schéma couplé de méthode des volumes finis.

En utilisant un modèle asymétrique, nous avons défini un modèle 2 – *swe* 1D représentant le déplacement de sédiment lors de ruptures de barrage.

Deuxième partie

Contrôlabilité des modèles de Boltzmann sur réseau

Chapitre 4

Commandabilité et Observabilité des écoulements en eaux peu profondes

4.1 Généralités

4.1.1 Introduction

La commandabilité et l'observabilité des systèmes à paramètres distribués ont fait l'objet de plusieurs études ces dernières décennies, voir [Lions \(1988\)](#), [Zuazua \(2002, 2006\)](#) et les références qui y sont. Parmi ces études, on distinguera celles sur les systèmes hyperboliques, [Cirinà \(1969\)](#), [T.-T. Li et al. \(2001\)](#), [T.-T. Li and Rao \(2003\)](#), [T.-T. Li et al. \(2008\)](#), [T.-T. Li \(2006\)](#), dont les résultats ont pu être adaptés au cas des écoulements en eaux peu profondes (représentés par les équations de Saint-Venant), voir [Coron \(2002\)](#), [Gugat and Leugering \(2005, 2009\)](#), [Li and Rao \(2004\)](#), [T.-T. Li \(2004, 2005\)](#) et les références qui y sont. L'analyse de ces systèmes peut se faire en non-linéaire ou après linéarisation autour d'un profil considéré. Cette différenciation peut avoir comme conséquence la définition de divers niveaux de propriétés (commandabilité/observabilité locale ou globale par exemple). Suivant que l'étude est menée sur un modèle de dimension infinie (sous forme d'équations aux dérivées partielles) directement ou sur des modèles obtenus après discrétisation, une différenciation doit également être faite (on parlera d'analyse en dimension finie ou d'analyse en dimension infinie).

Dans ce chapitre, nous ferons l'analyse (commandabilité, observabilité) des écoulements en eaux peu profondes en dimensions finie et infinie. Nous nous intéresserons notamment au cas de la commandabilité et de l'observabilité des modèles obtenus par la méthode de Boltzmann sur réseau. Nous terminerons le chapitre par une comparaison des propriétés de commandabilité entre les modèles de Boltzmann sur réseau et les modèles obtenus par discrétisation des équations de Saint-Venant en utilisant les méthodes classiques, précédemment présentées.

Nous rappelons que les écoulements en eaux peu profondes sont généralement représentés par les équations de Saint-Venant qui peuvent être données par

$$\partial_t \begin{pmatrix} h(x, t) \\ Q(x, t) \end{pmatrix} = -\partial_x \begin{pmatrix} \frac{Q}{B} \\ \frac{Q^2}{Bh} + \frac{1}{2}gBh^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ gBh(I - J) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

avec h la hauteur, Q le débit du fluide, B la largeur du canal considéré, x et t les variables spatiale et temporelle, respectivement, g l'accélération gravitationnelle, I et

J les termes désignant les forces de gravité (ou pente de fond) et de frottement (rugosité du fond et des berges notamment). On peut également exprimer les équations de Saint-Venant en hauteur h et vitesse d'écoulement u par

$$\partial_t \begin{pmatrix} h(x, t) \\ u(x, t) \end{pmatrix} = -\partial_x \begin{pmatrix} hu \\ \frac{u^2}{2} + gh \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(I - J) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Avant d'entamer l'analyse des écoulements en eaux peu profondes, nous présentons les différentes notions de commandabilité et d'observabilité en dimension finie et en dimension infinie de manière générale. Il s'agit ici de faire un rappel de ces notions courantes de l'automatique dans le cas de la dimension finie, et de les définir pour les systèmes à paramètres distribués.

4.1.2 Commandabilité/Observabilité en dimension finie

Considérons un système linéaire (ou linéarisé) qui peut être décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = Cz(t) \end{cases} \quad \text{pour tout } t \geq 0, \quad (4.3)$$

où $z \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie et $\mathbf{u} \in L^2[0, t; \mathbb{R}^m]$ représente le vecteur des commandes. Les matrices A , \mathbf{B} et C sont supposées de dimension $n \times n$, $n \times m$ et $p \times n$, respectivement, et représentent les opérateurs de dynamique, de commande et de sortie (les mesures).

Nous considérons dans la suite l'état final z_1 et l'état initial z_0 tels que z_1 et $z_0 \in \mathbb{R}^n$. Les notions de commandabilité et d'observabilité en dimension finie vont être définies dans la suite.

4.1.2.1 La commandabilité

La notion de commandabilité consiste à se poser la question de l'existence d'au moins une trajectoire permettant d'aller vers un état donné à partir d'un état initial. On a la définition suivante :

Définition 4.1

Le système (4.3) est commandable (ou la paire (A, \mathbf{B}) est commandable) si à partir d'un état initial $z_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une commande $\mathbf{u} \in L^2[0, t; \mathbb{R}^m]$ et $t > 0$ tel que pour tout état final $z_1 \in \mathbb{R}^n$, on puisse écrire

$$z(t, 0, z_0, \mathbf{u}(\cdot)) = z_1, \quad (4.4)$$

avec

$$z(t, 0, z_0, \mathbf{u}(\cdot)) = e^{At}z_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\mathbf{B}u(s)ds \quad (4.5)$$

la solution du système (4.3).

Il est à noter que la solution (4.5) peut se décomposer selon la réponse d'un système autonome (réponse libre) et d'un système commandé (réponse forcée) avec un état initial supposé nul. L'étude de la commandabilité consiste à traiter la réponse forcée pour atteindre, si possible, les états désirés. Sa caractérisation en dimension finie est liée à la détermination de la matrice de commandabilité. Cette dernière peut être définie comme suit :

Définition 4.2

Considérons le système (4.3), la matrice de commandabilité est une matrice de dimension $n \times nm$ définie par

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B}, A\mathbf{B}, \dots, A^{n-1}\mathbf{B}]. \quad (4.6)$$

La détermination de cette matrice donne une information sur la commandabilité ou non du système. Nous avons le théorème suivant :

Théoreme 4.3

Le système (4.3) est dit commandable si et seulement si la matrice de commandabilité est de plein rang ligne, c'est à dire si

$$\text{rang}(\mathcal{C}) = n. \quad (4.7)$$

4.1.2.2 L'observabilité

Le concept d'observabilité peut se ramener à la détermination de l'état initial du système connaissant les mesures et les commandes du système sur un intervalle de temps donné. Nous avons la définition suivante, voir [El Jai et al. \(2008\)](#) :

Définition 4.4

Le système (4.3) est dit observable sur l'intervalle de temps $[0, t]$ (ou la paire (A, C) est observable), si l'état initial, $z_0 \in \mathbb{R}^n$, peut être déterminée à partir de la connaissance des mesures, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, et des commandes, $\mathbf{u} \in L^2[0, t; \mathbb{R}^m]$.

Comme pour la commandabilité, il existe une condition nécessaire et suffisante sur l'observabilité qui est purement algébrique. Cette condition (critère de Kalman) repose sur la matrice d'observabilité de dimension $pn \times n$ donnée par

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Nous avons le théorème suivant :

Théoreme 4.5

Le système (4.3) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité \mathcal{O} est de plein rang colonne, c'est à dire si

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = n. \quad (4.9)$$

Il est à noter enfin que l'étude de l'observabilité consiste à traiter la réponse libre¹ du système, pour pouvoir reconstruire l'état initial connaissant les mesures.

Un autre constat est que les notions présentées montrent une symétrie. Dans le paragraphe suivant, nous montrons la relation entre ces deux notions, qui sont considérées duales.

1. On considère que la commande est nulle ou qu'elle est connue et donc qu'on peut soustraire de la solution la réponse forcée du système.

4.1.2.3 Dualité

Il est aujourd'hui bien établi que les notions de commandabilité et d'observabilité sont des notions duales (la connaissance de l'une peut permettre de conclure sur l'autre) pour un système considéré. La dualité de ces deux notions peut facilement être mise en exergue en définissant des systèmes appropriés, voir [El Jai et al. \(2008\)](#)

Définition 4.6

Considérons le système commandé

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= Az(t) + \mathbf{B}u(t), \text{ avec } t > 0 \\ z(0) &= z_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}, \quad (4.10)$$

et le système observé

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= \tilde{A}z(t), \text{ avec } t > 0 \\ z(0) &= z_0 \in \mathbb{R}^n \\ y(t) &= Cz(t) \end{cases}. \quad (4.11)$$

En prenant

$$\tilde{A} = A^* \text{ et } \mathbf{B}^* = C, \quad (4.12)$$

où M^* est l'opérateur (matrice) adjoint de M , les systèmes (4.10) et (4.11) sont dits duaux.

En effet, il est facile de vérifier que la matrice de commandabilité du système commandé (4.10) et la matrice d'observabilité du système observé (4.11) sont de même rang

$$\mathcal{O}^* = \mathcal{C}. \quad (4.13)$$

4.1.3 Commandabilité/Observabilité en dimension infinie

L'étude de la commandabilité et/ou de l'observabilité en dimension infinie englobe celle des systèmes à paramètres distribués représentés sous forme d'équations aux dérivées partielles. Ces systèmes à paramètres distribués sont souvent classés selon les directions asymptotiques associées à leurs équations caractéristiques, voir [Le pourhiet \(1988\)](#). On distingue généralement :

- les systèmes hyperboliques dont la plus connue est l'équation des ondes classique donnée par

$$\partial_t^2 z - \alpha^2 \partial_x^2 z = 0; \quad (4.14)$$

- les systèmes paraboliques, dont fait partie le système représenté par l'équation de chaleur,

$$\partial_t z = \lambda \partial_x^2 z. \quad (4.15)$$

On considère pour la suite une formulation abstraite des systèmes continus linéaires. Ces systèmes peuvent s'écrire sous la forme²

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= Az(t) + \mathbf{B}u(t) & (\text{dynamique}) \\ y(t) &= Cz(t) & (\text{observation}) \end{cases} \quad (4.16)$$

avec $t \geq 0$, $z(0) = z_0$ (état initial), avec

2. Cette forme peut représenter également des systèmes non linéaires en utilisant des opérateurs de dynamique, A , ou de commande, \mathbf{B} , adaptés.

- pour tout $t \geq 0$, $z(t) \in Z$, $\mathbf{u}(t) \in U$, $y(t) \in Y$ et Z , Y et U sont des espaces de Banach ;
- $\mathbf{u} : \mathbb{R}_+ \rightarrow U$ est une fonction de commande (entrée) localement intégrable ;
- $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow Y$ est une fonction d'observation (sortie) localement intégrable ;
- $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$ est générateur d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs $(\Phi(t)_{t \geq 0})$ avec $\Phi(t) \in \mathcal{L}(Z)$
- $\mathbf{B} : U \rightarrow Z$ est un opérateur de commande linéaire et borné ;
- $C : Z \rightarrow Y$ est un opérateur d'observation linéaire et borné.

Nous noterons par

- $\sum(A, \mathbf{B}, C)$ le système (4.16) ;
- $\sum(A, \mathbf{B}, -)$ le système (4.16) sans considération de la sortie ($C = 0$) ;
- $\sum(A, -, C)$ le système (4.16) sans considération de la commande ($\mathbf{B} = 0$).

La solution du système $\sum(A, \mathbf{B}, C)$ est donnée par

$$z(t, \mathbf{u}, z_0) = \Phi(t)z_0 + \int_0^t \Phi(t-s)\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds, \quad (4.17)$$

où Φ est le semi-groupe généré par l'opérateur A . Les notions de commandabilité et d'observabilité en dimensions infinie vont être définies dans la suite.

4.1.3.1 La commandabilité

L'objectif de commandabilité reste le même : nous désirons atteindre un état $z(t)$ donné à partir d'un état initial $z_0 = z(t=0)$. Sans perte de généralité, et comme nous l'avons signalé en dimension finie, l'étude de la commandabilité peut se ramener à celle de la réponse forcée. On peut supposer que l'état initial $z_0 = 0$, la solution est alors donnée par

$$z(t, \mathbf{u}, z_0 = 0) = \mathcal{B}_t[\mathbf{u}(\cdot)] = \int_0^t \Phi(t-s)\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds, \quad (4.18)$$

où $\mathcal{B}_t : L_2(0, t; U) \rightarrow Z$ est un opérateur de commandabilité défini par (4.18). Nous avons la définition suivante.

Définition 4.7

Le système $\sum(A, \mathbf{B}, -)$ est exactement commandable si tous les points dans Z peuvent être atteints au temps t à partir de l'origine z_0 , c'est à dire, si

$$Im(\mathcal{B}_t) = Z. \quad (4.19)$$

Remarque 4.8

On rappelle que $Im(\mathcal{B}_t) = \{z \in Z / \exists \mathbf{u} \in L^2(0, t; U) : z(t, \mathbf{u}, z_0) = z\}$.

La définition 4.7 généralise la notion de commandabilité des systèmes en dimension finie, mais elle s'avère très contraignante comme le montre la proposition suivante (voir proposition 8.5 dans Engel and Nagel (2000)) :

Proposition 4.9

Si l'opérateur $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(U, Z)$ d'un système de commande donné, $\Sigma(A, \mathbf{B}, -)$, est compact³, alors l'opérateur \mathcal{B}_t est compact pour $t > 0$. En particulier, si

$$\dim(Z) = \infty, \quad (4.20)$$

alors $\Sigma(A, \mathbf{B}, -)$ n'est jamais exactement commandable sur $[0, t]$.

La proposition 4.9 implique que dans des applications où l'espace de commande est de dimension finie, le système ne sera jamais exactement commandable. Pour cette raison, des notions de commandabilité moins contraignantes sont ainsi introduites :

Définition 4.10

1. Le système $\Sigma(A, \mathbf{B}, -)$ est dit *approximativement (ou faiblement) commandable* sur $[0, t]$, si pour tout $z_1 \in Z$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une commande \mathbf{u}_ϵ tel que $\|z_1 - z(t, z_0, \mathbf{u}_\epsilon)\| < \epsilon$;
2. Le système $\Sigma(A, \mathbf{B}, -)$ est dit *exactement nul-commandable* si tout état initial peut être amené à zéro via une commande adéquate, c'est à dire, à partir de $z_0 \neq 0$, on a $z(t, z_0, \mathbf{u}) = 0$.

4.1.3.2 L'observabilité

L'objectif de l'observabilité en dimension infinie reste identique à celui établi pour les systèmes en dimension finie. Il s'agit de se poser la question de la reconstruction de l'état initial $z_0 = z(t_0)$ à partir de la connaissance des mesures et des sorties. Les différences, comme pour la commandabilité, proviennent de la considération de notions d'observabilité moins contraignante que celle qui est généralisée à partir de la définition en dimension finie.

Nous considérons le système $\Sigma(A, -, C)$ et la solution du système donnée en (4.17). La sortie est alors donnée par

$$y(t) = C\Phi(t)z_0 + C \int_0^t \Phi(t-s)\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds, \quad (4.21)$$

et le problème d'observabilité se ramène à la reconstruction de l'état initial $z_0 \in Z$ (avec $\mathbf{u} = 0$) tel que

$$y(t) = C\Phi(t)z_0 = K(t)z_0, \quad t \geq 0, \quad (4.22)$$

où K est l'opérateur d'observation. Il peut être défini comme un opérateur linéaire et borné

$$K : z \in Z \rightarrow K(\cdot)z \in L^2(0, t; Y). \quad (4.23)$$

Son opérateur adjoint est donné par, voir Afifi et al. (2008), El Jai (2006)

$$K^*y = \int_0^t \Phi^*(s)C^*y(s)ds. \quad (4.24)$$

Nous avons les définitions suivantes, voir Afifi et al. (2008) :

3. L. Afifi et al. ont montré, voir Afifi et al. (2008), que les systèmes commandés représentés par des équations aux dérivées partielles pouvaient s'écrire sous la forme abstraite $\dot{z}(t) = Az(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ avec A générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs et $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(U, Z)$ la limite uniforme d'une suite d'opérateurs (\mathbf{B}_n) de dimension finie de $\mathcal{L}(U, Z)$.

Définition 4.11 1. Le système $\sum(A, -, C)$ (ou la paire (A, C)) est dit *exactement observable* sur $[0, t]$ si

$$Z' \subset \text{Im}K^* \quad (4.25)$$

où Z' représente l'espace dual⁴ de l'espace Z ;

2. Le système $\sum(A, -, C)$ (ou la paire (A, C)) est dit *approximativement observable* sur $[0, t]$ si

$$\text{Ker}K = 0 \quad (4.26)$$

Enfin, les constats faits en dimension finie entre la commandabilité et l'observabilité s'appliquent également en dimension infinie, notamment le concept de dualité. On peut écrire, voir [Curtain and Zwart \(1995\)](#) :

Proposition 4.12

Pour le système linéaire $\sum(A, -, C)$, nous avons les résultats de dualité suivant :

1. $\sum(A, -, C)$ est *approximativement observable* sur $[0, t]$ si et seulement si le système dual $\sum(A^*, C^*, -)$ est *approximativement commandable* sur $[0, t]$;
2. $\sum(A, -, C)$ est *exactement observable* sur $[0, t]$ si et seulement si le système dual $\sum(A^*, C^*, -)$ est *exactement commandable* sur $[0, t]$.

4.2 Sur la commandabilité/observabilité des équations de Saint-Venant

Les systèmes hyperboliques ont fait depuis des décennies l'objet de nombreuses études. Lors de ces études, plusieurs questions ont été abordées. Entre autres, les points suivants ont souvent été investigués :

- la recherche des solutions et le constat de leur explosion par la génération de singularités, voir [Alinhac \(1994-1995, 1995\)](#), [T.-T. Li\(Da-qian Li\) and Kong \(1999\)](#) et les références qui y sont ;
- la stabilisation des systèmes avec J. M. Coron et ses collaborateurs, voir [Diagne et al. \(2012\)](#), [Bastin and Coron \(2011\)](#), [Coron \(1999\)](#), [Coron et al. \(2007\)](#) ;
- l'étude des problèmes d'exakte commandabilité, avec J.-L. Lions [Lions \(1988\)](#), et d'exakte observabilité, avec T.-T. Li ou E. Zuazua, [T.-T. Li \(2006\)](#), [Zuazua \(2005b\)](#), [Infante and Zuazua \(1999\)](#) ;
- la définition et l'étude de diverses notions de commandabilité/observabilité moins contraignantes (faibles ou approximatives). Cirinà , [Cirinà \(1969\)](#), montre ainsi la nulle-commandabilité des systèmes hyperboliques, alors que T.-T. Li et ses collaborateurs établissent la commandabilité et l'observabilité locales pour des systèmes quasi-linéaires, [T.-T. Li et al. \(2001\)](#), [T.-T. Li and Rao \(2003\)](#), [T.-T. Li \(2006\)](#), [T.-T. Li et al. \(2008\)](#) ;
- enfin, dans [Gugat and Leugering \(2005, 2009\)](#), différentes considérations et relaxations sont faites pour s'approcher de la commandabilité exacte globale.

4. L'espace dual est l'ensemble des forme linéaires sur Z . L'observabilité consiste à essayer de reconstruire tout état z à partir de sa sortie y , l'inclusion de Z' dans l'image de K^* est donc justifiée.

Dans la plupart de ces travaux, les résultats sont basés sur l'utilisation d'une solution C^1 semi-globale. Suivant le contexte et dans certains travaux, la variation de cette norme, entre l'état initial et l'état final est limitée (commandabilité et observabilité locales). Nous allons présenter dans la suite les notions de la commandabilité et d'observabilité dans des systèmes hyperboliques en utilisant dans une première sous section cette solution C^1 . Cette présentation se basera sur les travaux de T.-T. Li, voir T.-T. Li et al. (2001), T.-T. Li (2006), T.-T. Li et al. (2008) et les références qui y sont. Dans une deuxième sous section, nous présenterons la commandabilité et l'observabilité en utilisant une approche énergétique, basée sur la formulation Hamiltonienne à ports.

Remarque 4.13 *Le fait de considérer une solution C^1 de petite norme entre l'état initial et l'état final ne permet pas de considérer la commandabilité exacte globale. Cependant, dans ce type d'équations, et d'un point de vue pratique, la recherche de la commandabilité exacte globale n'est pas souvent nécessaire. C'est le cas de l'exemple des équations représentant les écoulements en eaux peu profondes où nous étudierons la commandabilité autour de profils d'équilibre.*

4.2.1 Commandabilité et observabilité à partir de la solution C^1 semi-globale

Les systèmes hyperboliques nécessitent, en général, un temps t_f suffisamment grand pour la commandabilité, cela est du principalement au fait que la vitesse de propagation de l'information sur le domaine est finie. Lorsque le système est linéaire, une utilisation de la méthode HUM (pour Hilbert Uniqueness Method) permet de traiter la commandabilité par l'inégalité d'observabilité. Malheureusement, les équations de Saint-Venant sont non linéaires, mais peuvent se mettre sous forme quasi-linéaires, comme nous le montrerons. Les résultats sur les systèmes hyperboliques quasi-linéaires peuvent donc être étendus aux équations de Saint-Venant. Nous considérons donc des systèmes représentés par

$$\partial_t z_i + \lambda_i(z) \partial_x z_i = F_i(z), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4.27)$$

où $z = [z_1, \dots, z_n]^T$ est le vecteur de fonction inconnu en (x, t) , $\lambda_i(z)$ et $F_i(z)$ sont des fonctions C^1 de z et

$$F_i(0) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4.28)$$

On suppose sur le domaine considéré que les fonctions $\lambda_i(z)$ vérifient

$$\lambda_d(z) < 0 < \lambda_g(z) \quad (d = 1, \dots, m; g = m + 1, \dots, n). \quad (4.29)$$

On considère le problème avec comme condition initiale

$$t = 0 : \quad z = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.30)$$

et comme conditions aux frontières

$$x = 0 : \quad z_g = G_g(t, z_1, \dots, z_m) + H_g(t) \quad (g = m + 1, \dots, n) \quad (4.31)$$

$$x = L : \quad z_d = G_d(t, z_{m+1}, \dots, z_n) + H_d(t) \quad (d = 1, \dots, m) \quad (4.32)$$

où φ , G_i et H_i ($i = 1, \dots, m$) sont des fonctions C^1 par rapport à leurs arguments, et sans perte de généralité, on prend

$$G_i(t, 0, \dots, 0) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4.33)$$

On s'intéresse à la commandabilité du système en temps t_f . En tenant compte de la vitesse finie de propagation de l'information dans le système et du théorème d'existence locale de la solution C^1 , il existe une constante $0 < \delta < t_f$ telle que le problème (4.27) et (4.30)-(4.32) admet une solution C^1 unique sur le domaine

$$R_\delta = \{(t, x) | 0 \leq t \leq \delta, 0 \leq x \leq L\}. \quad (4.34)$$

Cependant, cette solution peut exploser en temps fini, T.-T. Li et al. (2000, 2001), et le problème précédent n'a donc pas toujours une solution globale. La question se pose encore en supposant que la solution existe pour un temps plus grand que t_f . T.-T. Li et al., T.-T. Li et al. (2000, 2001), montrent que pour un choix approprié des conditions initiales $\varphi(x)$ et des commandes H_g et H_d , le problème (4.27) et (4.30)-(4.32) admet une solution unique C^1 appelée *solution C^1 semi-globale* sur le domaine

$$R(t_f) = \{(t, x) | 0 \leq t \leq t_f, 0 \leq x \leq L\}. \quad (4.35)$$

En fait le domaine $R(t_f)$ est obtenu par extension du domaine R_δ pour une évolution de la solution telle que la norme de cette dernière soit suffisamment petite. La notion de petite norme est ici défini par l'existence d'une constante positive $M(t_f)$ vérifiant

$$\|\varphi\|_{C^1[0,L]} \leq M(t_f) \quad (4.36)$$

et

$$\|H_i\|_{C^1[0,L]} \leq M(t_f), \quad \text{avec } i \in \{d, g\}. \quad (4.37)$$

Cette constante $M(t_f)$ est indépendante de δ et dépend de t_f .

Le théorème suivant est donné, voir T.-T. Li and Rao (2003)

Théoreme 4.14

Soit

$$t_f > \max_i \frac{L}{|\lambda_i(0)|}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4.38)$$

Sous les hypothèses considérées (4.28)-(4.33), pour tout état initial $\varphi(x)$ et tout état final $\psi(x)$ avec de petites normes C^1 $\|\varphi\|_{C^1[0,L]}$ et $\|\psi\|_{C^1[0,L]}$, il existe des commandes frontières $H_i \in C^1[0, t_f]$ ($i = 1, \dots, n$) avec de petites normes C^1 , telles que le problème (4.27) et (4.30)-(4.32) admet une unique solution C^1 semi-globale $z = z(t, x)$ avec une petite norme C^1 sur le domaine

$$R(t_f) = \{(t, x) | 0 \leq t \leq t_f, 0 \leq x \leq L\}, \quad (4.39)$$

qui satisfait exactement la condition finale

$$t = t_f : \quad z = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (4.40)$$

En reconsidérant le système

$$\partial_t z_i + \lambda_i(z) \partial_x z_i = F_i(z), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4.41)$$

où $z = [z_1, \dots, z_n]^T$ est le vecteur de fonctions inconnues en (x, t) , $\lambda_i(z)$ et $F_i(z)$ sont des fonctions C^1 de z et

$$F_i(0) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4.42)$$

En supposant sur le domaine considéré que les fonctions $\lambda_i(z)$ vérifient

$$\lambda_d(z) < 0 < \lambda_g(z) \quad (d = 1, \dots, m; g = m + 1, \dots, n), \quad (4.43)$$

que la condition initiale est donnée par

$$t = 0 : \quad z = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.44)$$

et que les conditions aux frontières sont

$$x = 0 : \quad z_g = G_g(t, z_1, \dots, z_m) + H_g(t) \quad (g = m + 1, \dots, n) \quad (4.45)$$

$$x = L : \quad z_d = G_d(t, z_{m+1}, \dots, z_n) + H_d(t) \quad (d = 1, \dots, m) \quad (4.46)$$

où φ , G_i et H_i ($i = 1, \dots, m$) sont des fonctions C^1 par rapport à leurs arguments, et sans perte de généralité, on prend

$$G_i(t, 0, \dots, 0) = 0 \quad (i = 1, \dots, m), \quad (4.47)$$

l'observabilité sur les deux côtés est donnée par le théorème suivant

Théoreme 4.15 ~

Soit

$$t_f > \max_{\substack{d = 1, \dots, m \\ g = m + 1, \dots, n}} \left(\frac{1}{|\lambda_d(0)|}, \frac{1}{|\lambda_g(0)|} \right). \quad (4.48)$$

Supposons que la norme $C^1[0, t_f]$ de $H(t)$ est petite. Pour tout état initial donné $\varphi(x)$, tel que $\|\varphi(x)\|_{C^1[0, L]}$ est petite et les conditions de compatibilité des valeurs initiales aux frontières sont satisfaites aux points $(x, t) = (0, 0)$ et $(x, t) = (L, 0)$, si nous avons observé les valeurs $z_d = \hat{z}_d(t)$ ($d = 1, \dots, m$) en $x = 0$ et $z_g = \hat{z}_g(t)$ ($g = m + 1, \dots, n$) en $x = L$ sur l'intervalle $[0, t_f]$, alors l'état initial $\varphi(x)$ peut être déterminé et on a l'inégalité suivante

$$\|\varphi\|_{C^1[0, L]} \leq c \left(\sum_{d=1}^m \|\hat{z}_d\|_{C^1[0, t_f]} + \sum_{g=m+1}^n \|\hat{z}_g\|_{C^1[0, t_f]} + \|H\|_{C^1[0, t_f]} \right), \quad (4.49)$$

où c est une constante positive.

Les précédents résultats sont établis pour la commandabilité et l'observabilité exactes des systèmes hyperboliques quasi-linéaires. Cependant, ces résultats sont locaux. En effet les contraintes imposées sur le choix des conditions initiales $\varphi(x)$

et des commandes $H_i(t)$ ($i \in \{d, g\}$) impose des variations particulières entre l'état initial et l'état final pour un temps t considérable.

Ces théorèmes peuvent être adaptés aux écoulements en eaux peu profondes. Les écoulements en eaux peu profondes sont représentés par les équations de Saint-Venant qui sont hyperboliques. On peut les écrire sous la forme

$$\partial_t \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} + A \partial_x \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(I - J) \end{pmatrix}, \quad (4.50)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

On peut vérifier que les valeurs propres de A données par

$$\lambda_1 = u + \sqrt{gh} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = u - \sqrt{gh}, \quad (4.52)$$

sont distinctes non nulles et de signe opposé pour un écoulement de type fluvial (avec $c = \sqrt{gh} > u$, où c désigne la célérité).

Pour utiliser les théorèmes précédents, nous pouvons représenter les équations de Saint-Venant sous forme quasi-linéaire en utilisant les invariants de Riemann. Cela présente également l'avantage de diagonaliser le système. Ce modèle s'écrit, en utilisant ces invariants, sous la forme

$$\partial_t \begin{pmatrix} \gamma_+ \\ \gamma_- \end{pmatrix} + \Lambda \partial_x \begin{pmatrix} \gamma_+ \\ \gamma_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(I - J) \\ g(I - J) \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

où

$$\gamma_+ = u + 2\sqrt{gh}, \quad (4.54)$$

$$\gamma_- = u - 2\sqrt{gh}, \quad (4.55)$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2), \quad (4.56)$$

avec $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ les valeurs propres définies en (4.52).

Nous allons présenter dans la suite, des résultats s'inspirant des théorèmes 4.14 et 4.15, et s'appliquant à différentes modélisation des équations de Saint-Venant (en utilisant les invariants de Riemann, et avec une modélisation en hauteur et vitesse d'eau).

En utilisant la modélisation en (4.50), on définit la condition initiale

$$t = 0 : \quad (h, u) = (h_0(x), u_0(x)), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (4.57)$$

les conditions aux bords d'un canal de longueur L sont données par

$$x = 0 : \quad hu = q(t), \quad (4.58)$$

et

$$x = L : \quad hu = p(t). \quad (4.59)$$

Et supposant que les conditions de compatibilité C^1 sont respectées aux bords, on a l'équivalent du théorème 4.14 appliqué aux équations de Saint-Venant donné par le théorème suivant, voir Li and Rao (2004), T.-T. Li (2004).

Théoreme 4.16

Soit

$$t_f > \left(\frac{L}{|\lambda_i|}\right), \quad (i = 1, 2) \quad (4.60)$$

où

$$\lambda_1 = u_0 - \sqrt{gh_0} < 0, \quad \lambda_2 = u_0 + \sqrt{gh_0} > 0. \quad (4.61)$$

Pour tout état d'équilibre (h_0, u_0) du système (4.50) avec $h_0 > 0$ tel que le système soit en régime sous-critique, prenons

$$T_0 > \max_i \frac{L}{|\lambda_i|}, \quad (i = 1, 2). \quad (4.62)$$

Pour tout état initial $(h_0(x), u_0(x)) \in C^1[0, L]$ et état final $(h_{t_f}(x), u_{t_f}(x)) \in C^1[0, L]$ avec de petites normes $C^1[0, L]$ $\|(h_0(\cdot) - h_0, u_0(\cdot) - u_0)\|_{C^1[0, L]}$ et $\|(h_{t_f}(\cdot) - h_0, u_{t_f}(\cdot) - u_0)\|_{C^1[0, L]}$, il existe des commandes $q(t)$ et $p(t) \in C^1[0, t_f]$ avec de petites normes $\|p(\cdot) - h_0 u_0\|_{C^1[0, t_f]}$ et $\|q(\cdot) - h_0 u_0\|_{C^1[0, t_f]}$ telles que le problème (4.50) et (4.57)-(4.59) admet une solution C^1 semi-globale $(h, u) = (h(t, x), u(t, x))$ avec de petites normes C^1 $\|(h - h_0, u - u_0)\|_{C^1}$ sur le domaine

$$R(t_f) = \{(t, x) | 0 \leq t \leq t_f, 0 \leq x \leq L\}, \quad (4.63)$$

qui satisfait exactement la condition finale

$$t = t_f : \quad (h, u) = (h_{t_f}(x), u_{t_f}(x)), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (4.64)$$

avec (h_0, u_0) l'état d'équilibre du système.

Comme nous l'avons fait remarquer précédemment, les théorèmes basés sur cette approche traitent de la commandabilité locale exacte. En effet, pour éviter d'avoir des solutions qui explosent, on doit s'assurer constamment que les normes $\|\cdot\|_{C^1[0, L]}$ des états et des commandes sont bornées, T.-T. Li (Da-qian Li) and Kong (1999), T.-T. Li et al. (2001, 2000), T.-T. Li and Rao (2003). Dans un esprit similaire, Gugat et Leugering proposent Gugat and Leugering (2009), en utilisant la formulation des équations de Saint-Venant avec les invariants de Rieman en (4.53), les commandes $p(t)$ et $q(t)$ donnés par

$$x = 0 : \quad q(t) = \gamma_+(0, t), \quad (4.65)$$

et

$$x = L : \quad p(t) = \gamma_-(L, t), \quad (4.66)$$

le théorème suivant :

Théoreme 4.17

On considère le problème (4.50) avec les commandes en (4.65)-(4.66). Pour tout nombre $M > 0$, $\delta > 0$ et $\epsilon > 0$ avec $\delta < M$, on définit le temps fini

$$t_f(\delta, M) = \max \left\{ \max \left\{ \frac{L}{|\lambda_1|}, \frac{L}{|\lambda_2|} \right\} : (h, u) \in \mathbb{R}^2 : \delta \leq gh - u^2, |u| \leq M, g(I - J) = 0 \right\} \right\} \quad (4.67)$$

et l'ensemble de fonctions

$$\begin{aligned} G(\delta, M, \epsilon) = \{ (h, u) \in C^1[0, L] : \text{pour tout } x \in [0, L] : \\ \delta \leq gh(x) - u^2(x), |u(x)| \leq M, h(x) \leq M, |g(I(x) - J(x))| \leq \epsilon, \\ |h'(x)| \leq \epsilon, |u'(x)| \leq \epsilon \}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Alors pour tout δ, M avec $0 < \delta < M$ il existe un nombre $\epsilon > 0$ et un temps $T_0 > t_f(\delta, M)$ tel que entre tout état initial et tout état final dans $G(\delta, M, \epsilon)$ la commandabilité exacte en temps T_0 est possible, c'est à dire pour tout $(h_0, u_0) \in G(\delta, M, \epsilon)$ et $(h_1, u_1) \in G(\delta, M, \epsilon)$ il existe des commandes frontières $q(t)$ et $p(t)$ telles qu'il existe une unique solution continue différentiable satisfaisant la condition finale

$$h(x, T_0) = h_1(x), \quad u(x, T_0) = u_1(x), \quad x \in [0, L]. \quad (4.69)$$

Le théorème 4.17 précise également la commandabilité exacte locale en limitant les normes des commandes, mais également des états. Cependant, d'un point de vue pratique, notamment dans le cas des écoulements en eau peu profondes où l'on s'intéresse à des profils autour d'un équilibre donné, la commandabilité locale suffit en général.

En utilisant le principe de dualité, et les résultats sur la commandabilité des systèmes hyperboliques présentés précédemment, les résultats sur l'observabilité de ces systèmes peuvent être obtenus, voir [Gu \(2009\)](#).

4.2.2 Commandabilité et observabilité : approche Hamiltonienne à ports

4.2.2.1 Généralités

Dans cette section, nous allons présenter une approche énergétique permettant de représenter la dynamique des écoulements en eaux peu profondes. On linéariserait le modèle obtenu pour pouvoir analyser sa commandabilité dans le cas d'une discrétisation avec la méthode de Boltzmann sur réseau. Nous utiliserons également les notions présentées dans la suite pour l'analyse de la commandabilité uniforme des modèles de Boltzmann sur réseau.

Nous considérons les écoulements dans un canal rectangulaire de profil de fond h_b et de largeur B . Les équations de Saint-Venant exprimées en hauteur h et débit hu dans un tel canal sont données par

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \quad (4.70)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2) = gh(I - J), \quad (4.71)$$

avec

$$I = \partial_x h_b \quad (4.72)$$

où J est le terme de frottement défini en utilisant la relation de Maning-Strickler. L'énergie E dans un tel canal peut être donnée par, voir [Hamroun \(2009\)](#) :

$$E = \int_0^L \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c \quad (4.73)$$

avec \mathcal{E}_c et \mathcal{E}_p les densités linéaires d'énergies cinétique et potentielle données respectivement par :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}\rho B h u^2 dx, \quad (4.74)$$

et

$$\mathcal{E}_p = \left(\int_{h_b}^{h+h_b} \rho g B \eta d\eta \right) dx, \quad (4.75)$$

et en considérant de faibles pentes, $h_b \simeq -Ix$, on peut écrire

$$\int_{h_b}^{h+h_b} \rho g B \eta d\eta = \frac{1}{2}(\rho g B h^2 - 2\rho g B I h x), \quad (4.76)$$

et finalement, l'énergie s'écrira comme suit

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho (g B h^2(x, t) - 2g B I h(x, t)x + B h(x, t)u^2(x, t)) dx. \quad (4.77)$$

Nous allons représenter les équations de Saint-Venant en utilisant une représentation Hamiltonienne à ports, voir [van der Schaft \(2006\)](#) et les références qui y sont. Cette représentation permettra de définir l'énergie du système comme une norme dans un certain espace.

4.2.2.2 Modèles Hamiltoniens et linéarisation

Nous considérons comme variables d'énergie les densités de masse et de quantité de mouvement q et p définies par

$$q(x, t) = B h(x, t) \in H^1(0, L), \quad (4.78)$$

$$p(x, t) = \rho u(x, t) \in H^1(0, L). \quad (4.79)$$

En l'absence de frottements, nous pouvons représenter les équations de Saint-Venant sous forme Hamiltonienne à ports :

$$\partial_t \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \partial_x \begin{bmatrix} e_q \\ e_p \end{bmatrix}, \quad (4.80)$$

avec e_q et e_p les dérivées variationnelles de l'énergie E données par rapport aux variations de q et p :

$$e_q(x, t) = \delta_q E = \frac{1}{2}\rho u^2(x, t) + \rho g(h(x, t) - Ix), \quad (4.81)$$

$$e_p(x, t) = \delta_p E = B h(x, t)u(x, t). \quad (4.82)$$

Il est facile de vérifier que (4.80) est équivalent aux équations de Saint-Venant (4.70-4.71) sans le terme de dissipation J . La linéarisation de (4.80), lorsqu'on néglige la pente, autour d'un point de fonctionnement (h_e, u_e) , c'est à dire (q_e, p_e) , où

$$q_e = B h_e \quad (4.83)$$

$$p_e = \rho u_e \quad (4.84)$$

est donnée par

$$\partial_t \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \partial_x \begin{bmatrix} \frac{\rho g}{B} & \frac{p_e}{\rho} \\ \frac{p_e}{\rho} & \frac{q_e}{\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}, \quad (4.85)$$

avec $\tilde{q} = q - q_e$ et $\tilde{p} = p - p_e$. Le système linéarisé (4.85) peut s'écrire sous la forme

$$\partial_t z(x, t) = \mathcal{J} \mathcal{L} z(x, t), \quad (4.86)$$

avec $z(x, t) = [\tilde{q}(x, t) \ \tilde{p}(x, t)]^T$ et $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{\rho g}{B} & \frac{p_e}{\rho} \\ \frac{p_e}{\rho} & \frac{q_e}{\rho} \end{bmatrix}$ est une matrice bornée, symétrique et définie positive. L'opérateur \mathcal{J} peut être écrit comme une matrice symétrique P_1 qui multiplie ∂_x . Il est à noter que la matrice \mathcal{J} ainsi définie est formellement anti-symétrique.

La forme (4.86) est traitée dans Villegas (2007), il y est montré que si on choisit les variables d'énergie comme variables d'état, et l'espace d'état $Z = (L_2(0, L))^2$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}}$ défini par

$$\langle z_1, z_2 \rangle_{\mathcal{L}} = \langle z_1, \mathcal{L} z_2 \rangle, \quad \forall (z_1, z_2) \in Z, \quad (4.87)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire standard dans L_2 , alors le produit scalaire ainsi défini est valide puisque \mathcal{L} est bornée et définie positive. En effet, les valeurs propres de \mathcal{L} sont données par

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho g}{B} + \frac{q_e}{\rho} + \sqrt{\Delta} \right) \quad (4.88)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho g}{B} + \frac{q_e}{\rho} - \sqrt{\Delta} \right) \quad (4.89)$$

où Δ est le déterminant donné par

$$\Delta = \left(\frac{\rho g}{B} + \frac{q_e}{\rho} \right)^2 - 4 \left(\frac{g q_e}{B} - \frac{p_e^2}{\rho^2} \right) \quad (4.90)$$

$$= \left(\frac{\rho g}{B} - \frac{q_e}{\rho} \right)^2 + 4 \frac{p_e^2}{\rho^2}. \quad (4.91)$$

On voit immédiatement que $\lambda_1 > 0$. Pour λ_2 , si on considère un point de fonctionnement en régime fluvial, on a

$$\frac{g q_e}{B} = g h_e > u_e^2 \quad (4.92)$$

et en utilisant (4.90), on a

$$\frac{\rho g}{B} + \frac{q_e}{\rho} > \sqrt{\Delta} \quad (4.93)$$

qui permet de conclure que λ_2 est également positif. L'énergie de la solution du système linéarisé (4.85) à un instant t_f peut donc s'écrire à l'aide de la norme associée :

$$\begin{aligned} \|z\|_{\mathcal{L}}^2 &= \langle z, z \rangle_{\mathcal{L}} \\ &= \langle z, \mathcal{L} z \rangle \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\rho g}{B} & \frac{p_e}{\rho} \\ \frac{p_e}{\rho} & \frac{q_e}{\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\rho g}{B} \tilde{q}^2 + \frac{q_e}{\rho} \tilde{p}^2 + 2 \frac{p_e}{\rho} \tilde{q} \tilde{p} \right) dx. \end{aligned} \quad (4.94)$$

qui est équivalente à l'énergie du système linéarisé $(e_q|_{q_e, p_e} \cdot \tilde{q} + e_p|_{q_e, p_e} \cdot \tilde{p})$. En effet, on peut écrire (lorsque q_e/\tilde{q} et p_e/\tilde{p} sont positifs)

$$\|z\|_{\mathcal{L}}^2 \leq e_q|_{q_e, p_e} \cdot \tilde{q} + e_p|_{q_e, p_e} \cdot \tilde{p} \leq \max \left(\frac{q_e}{\tilde{q}}, 4 \frac{p_e}{\tilde{p}} \right) \|z\|_{\mathcal{L}}^2. \quad (4.95)$$

Il est montré dans Hamroun (2009) que la variation d'énergie dans le système (Hamiltonien à ports) est étroitement liée à l'énergie fournie (ou mesurée) aux frontières du domaine considéré. Et dans le même temps, en utilisant l'inégalité d'observabilité, on peut évaluer la commandabilité du système à partir de l'énergie initial dans le système et de l'énergie fournie aux frontières sur un temps donné. Nous y reviendrons dans le chapitre 6. Nous présentons dans la suite quelques résultats présentés dans Villegas (2007) sur la commandabilité des systèmes définis sous la forme (4.86).

4.2.2.3 Résultats de commandabilité

Considérons un canal d'irrigation horizontal, sans frottements, constitué d'un bief que l'on souhaite commander ou observer aux bords (commande ou observation à partir des frontières). Ce système peut être décrit par la représentation d'état

$$\partial_t z(x, t) = \mathcal{J} \mathcal{L} z(x, t), \quad z(x, 0) = z_0(x) \quad (4.96)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B} z(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0 \quad (4.97)$$

$$y(t) = \mathbf{C} z(x, t) \quad (4.98)$$

où (4.96) est le modèle Hamiltonien à ports des équations de Saint-Venant linéarisées (avec \mathcal{J} un opérateur formellement anti-symétrique et \mathcal{L} une matrice bornée, symétrique et définie positive). \mathbf{B} et \mathbf{C} représentent, respectivement, les opérateurs de commande et d'observation à la frontière associés au système.

Nous venons de montrer que la norme associée à la matrice \mathcal{L} correspond au Hamiltonien

$$H(z) = \frac{1}{2} \int_0^L z^T(x) (\mathcal{L} z)(x) dx = \frac{1}{2} \|z\|_{\mathcal{L}}^2 \quad (4.99)$$

Cet Hamiltonien permet la définition des variables de port à la frontière :

- les variables de flux, $\mathbf{f} = \partial_t \mathbf{z}$;
- les variables d'effort, $\mathbf{e} = \delta_{\mathbf{z}} H = \mathcal{L} z$;
- les variables de port aux frontières, \mathbf{f}_{∂} , \mathbf{e}_{∂} .

Le système

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f}_{\partial} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{e}_{\partial} \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

définit une structure de Dirac, pour plus de détails voir Macchelli et al. (2002), Cervera et al. (2007), Hamroun (2009). Nous avons le théorème suivant, qui est une adaptation à notre cas d'étude du théorème dans Villegas (2007) :

Théoreme 4.18 *Soit W une matrice, 2×4 , de plein rang, et considérons l'opérateur $\mathcal{J} \mathcal{L}$ décrit précédemment sur Z . On définit $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ et son domaine, $D(\mathcal{A}_{\mathcal{L}})$, par*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{L}} z = \mathcal{J} \mathcal{L} z \quad (4.101)$$

et

$$D(\mathcal{A}_{\mathcal{L}}) = \left\{ z \in Z \mid \mathcal{L}z \in H^1((0, L); \mathbb{R}^2), \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\partial, \mathcal{L}z} \\ \mathbf{e}_{\partial, \mathcal{L}z} \end{bmatrix} \in \ker W \right\}. \quad (4.102)$$

Alors $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ est générateur d'un semi-groupe de contraction $\Phi(t)$, $t \geq 0$, sur Z si et seulement si W vérifie

$$W\Sigma W^T \geq 0, \quad (4.103)$$

avec $\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$.

De plus, $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ est générateur d'un semi-groupe unitaire sur Z si et seulement si W vérifie

$$W\Sigma W^T = 0. \quad (4.104)$$

Le précédent théorème fournit des conditions sur la génération par $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ de semi-groupes particuliers. Il s'agit notamment des semi-groupes de contraction et unitaire. Il est à noter que ces semi-groupes permettent généralement de conclure sur la stabilité du système, voir chapitres 6 à 9 de [Jacob and Zwart \(2011\)](#). Pour la commandabilité et/ou l'observabilité, le choix de la matrice W dépend des matrices \mathbf{B} et/ou C . En fait il est montré qu'un choix judicieux de W permet de déterminer une relation simple entre les variables de port et les variables de commande et d'observation de manière à définir un système commandé aux frontières dit *BCS* (pour *Boundary Control System*), voir [Villegas \(2007\)](#). Nous avons pour la commande le théorème suivant

Théorème 4.19 *Soit W une matrice de plein rang, 2×4 , et considérons l'opérateur \mathcal{JL} défini précédemment. Si W satisfait $W\Sigma W^T \geq 0$, où $\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$, alors le système*

$$\partial_t z(t) = \mathcal{JL}z(t),$$

défini sur l'espace d'état Z avec comme entrée

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}z(t) = W \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\partial, \mathcal{L}z} \\ \mathbf{e}_{\partial, \mathcal{L}z} \end{bmatrix}$$

est un système commandé aux frontières sur Z . De plus, l'opérateur $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} = \mathcal{JL}$ avec le domaine

$$D(\mathcal{A}_{\mathcal{L}}) = \{z \in Z \mid \mathcal{L}z \in H^1(0, L; \mathbb{R}^2), \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\partial, \mathcal{L}z} \\ \mathbf{e}_{\partial, \mathcal{L}z} \end{bmatrix} \in \ker W\},$$

génère un semi-groupe de contraction sur Z .

On peut définir de même un opérateur de sortie C associé à des mêmes variables de ports et d'une matrice \tilde{W} telles que le problème d'observabilité puisse être vu comme un problème aux frontières.

Il est à noter que lorsque W et \tilde{W} sont définies, il est possible de passer des variables de ports vers les variables d'entrées et de sortie et vice versa, à condition que $\begin{bmatrix} W \\ \tilde{W} \end{bmatrix}$ soit inversible. Les systèmes Hamiltoniens à ports sont généralement

caractérisés par le fait qu'à tout instant t la somme des énergies finale et de sortie ne peut être plus grande que la somme des énergies initiale et d'entrée : on parle de passivité du système. Nous avons la définition suivante.

Définition 4.20 *Soit le système*

$$\partial_t z(t) = Az(t) + \mathbf{B}u(t), \quad z(0) = z_0 \quad (4.105)$$

$$y(t) = Cz(t), \quad (4.106)$$

avec $z \in Z$ le vecteur d'état, $u \in U$ et $y \in Y$. Ce système est passif en variables d'ondes (scattering passive) si, pour tout $t > 0$, les solutions z de (4.105) et y de (4.106) satisfont

$$\|z(t)\|_Z^2 - \|z_0\|_Z^2 \leq K \int_0^t \|u(\tau)\|_U^2 d\tau - K \int_0^t \|y(\tau)\|_Y^2 d\tau. \quad (4.107)$$

Il préserve l'énergie en variables d'ondes si l'inégalité précédente se ramène en une égalité.

Nous avons le théorème suivant

Théorème 4.21 *Conservation de l'énergie en variables d'ondes*

Considérons le système de commande défini au théorème 4.19 et prenons W et \tilde{W} des matrices de taille 2×4 telles que $\begin{bmatrix} W \\ \tilde{W} \end{bmatrix}$ est non singulière. Alors pour $u \in C^2(0, \infty; \mathbb{R}^2)$, $\mathcal{L}z(0) \in H^1(0, L; \mathbb{R}^2)$, et $\mathbf{B}z(0) = u(0)$ l'équation de conservation est satisfaite si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites

$$W = S[I + V, \quad I - V], \quad \text{avec } 4S(I - VV^T)S^T = I, \quad (4.108)$$

$$\tilde{W} = \tilde{S}[-(I + V^T), \quad I - V^T], \quad \text{avec } 4\tilde{S}(I - V^TV)\tilde{S}^T = I. \quad (4.109)$$

S et \tilde{S} sont non singulières, et V et \tilde{V} sont unitaires.

Comme conséquence, on a

$$2W^TW - 2\tilde{W}^T\tilde{W} = \Sigma \quad (4.110)$$

$$\text{avec } \Sigma = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

En utilisant la définition 4.20, et le théorème précédent, on peut démontrer le théorème suivant, Villegas (2007)

Théorème 4.22 *Considérons un système commandé aux frontières qui préserve l'énergie en variables d'ondes comme décrit au théorème 4.21. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Le système est exactement commandable au temps t_f ;
2. le système est exactement observable au temps t_f ;
3. le semi-groupe $\Phi(t)$ généré par $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ satisfait $\|\Phi(t_f)\| < 1$ (en particulier, le système est exponentiellement stable).

Après avoir présenté les résultats obtenus, nous nous intéressons dans la section suivante à l'étude de la commandabilité des modèles LB.

4.3 Le cas de la méthode de Boltzmann sur réseau

4.3.1 Un modèle de grande taille

La méthode de Boltzmann sur réseau peut être définie par la dynamique locale rappelée en (4.111)

$$f_i(r + v_i \delta t, t + \delta t) = f_i(r, t) + \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i) \quad (i = 1, \dots, q), \quad (4.111)$$

où q est le nombre de directions de propagation. Il est possible d'y ajouter un terme incorporant les effets de forces :

$$f_i(r + v_i \delta t, t + \delta t) = f_i(r, t) + \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i) + \omega_i \frac{\delta t}{c_s^2} v_i F, \quad (4.112)$$

où F est le terme de force simple et où les paramètres ω_i et c_s sont définis en (1.34)-(1.38).

Nous avons montré dans la section 4.2 que les équations de Saint-Venant étaient, du mieux de nos connaissances, localement commandables. Pour cette raison, nous considérerons dans la suite un modèle linéarisé des équations de Boltzmann sur réseau. Si nous considérons un réseau $D1Q3$, la linéarisation du modèle, avec terme de force, autour d'un profil d'équilibre (h_e, u_e) conduit à une écriture de la forme

$$\epsilon_i(r_j, t + \delta t) = T_i \begin{bmatrix} \epsilon_0(r_{j-\bar{v}_i}, t) \\ \epsilon_1(r_{j-\bar{v}_i}, t) \\ \epsilon_2(r_{j-\bar{v}_i}, t) \end{bmatrix} + \bar{v}_i T_N \begin{bmatrix} \epsilon_0(r_{j-\bar{v}_i}, t) \\ \epsilon_1(r_{j-\bar{v}_i}, t) \\ \epsilon_2(r_{j-\bar{v}_i}, t) \end{bmatrix} + \bar{v}_i g h_e (I - J_e) \quad (4.113)$$

avec

$$i \in \{0, 1, 2\},$$

$$T_0 = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \tau - \frac{1}{\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) & 1 - \frac{1}{\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) - 2 \frac{Fr_e}{\Psi_e} & 1 - \frac{1}{\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) + 2 \frac{Fr_e}{\Psi_e} \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

$$T_1 = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) & \tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) + \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) - \frac{1}{2} - \frac{Fr_e}{\Psi_e} \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

$$T_2 = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) & \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) - \frac{1}{2} + \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) - \frac{Fr_e}{\Psi_e} \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

et

$$T_N = \frac{\delta t}{2v} g \begin{bmatrix} (I + J_e + \frac{4J_e R_e}{3h_e}) & (I + J_e + \frac{4J_e R_e}{3h_e} - \frac{2J_e v}{u_e}) & (I + J_e + \frac{4J_e R_e}{3h_e} + \frac{2J_e v}{u_e}) \end{bmatrix}. \quad (4.117)$$

Si on suppose que $J_e = I$ (compensation des termes de frottement et de gravité à l'équilibre), le modèle linéarisé autour du profil (h_e, u_e) est donné par

$$z(k+1) = T_f z(k) \quad (4.118)$$

avec

$$z(k) = [\epsilon_0(r_1, k), \epsilon_1(r_1, k), \epsilon_2(r_1, k), \dots, \epsilon_0(r_N, k), \epsilon_1(r_N, k), \epsilon_2(r_N, k)]^T \quad (4.119)$$

et T_f est donné en (2.59).

Dans le cas de commandes ou d'observation du système, nous avons présenté dans le Chapitre 2, la possibilité d'introduire des entrées, pour la commande, et des sorties, pour l'observation, au système. Cela a abouti, dans le cas d'un système linéaire ou linéarisé, à la mise sous forme d'équations d'état

$$\begin{cases} z_{k+1} &= F_{lb}z_k + G_{lb}\mathbf{u}_k \\ z_0 &\in Z_{lb}^r \end{cases}, \quad (4.120)$$

où les différents paramètres sont ceux définis au Chapitre 2. Par dualité, on pourra définir un système autonome associé à une sortie pour l'étude de l'observabilité. L'espace d'état dans la méthode de Boltzmann sur réseau est défini par l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les différentes distributions à un instant donné, cet espace est défini par la dimension du réseau ($1D$, $2D$ ou $3D$), par le type de voisinage considéré et par le nombre de sites.

Nous considérons le réseau $1D$ avec n sites et trois voisins. Dans le cas d'un système autonome (avant projection et prise en compte des entrées et/ou des sorties), l'espace d'état est défini par $Z_{lb} = (\mathbb{R}^+)^{3n}$. Dans le cas d'un système avec commande frontière aux deux extrémités, l'espace d'état subit une restriction, et sera alors défini par $Z_{lb}^r = (\mathbb{R}^+)^{3n-2}$. Après la définition du modèle d'espace d'état, l'étude de la commandabilité et/ou de l'observabilité se fait en appliquant la théorie de dimension finie. Nous allons le voir à travers un exemple.

Nous considérons, pour exemple, le cas d'un canal avec un bief et des commandes aux frontières. Le canal considéré est le canal expérimental du LCIS⁵ dont les paramètres sont :

- $L = 7m$ pour la longueur ;
- $B = 0.1m$ pour la largeur ;
- $g = 9.81$ l'accélération gravitationnelle ;
- la pente moyenne est $I = 1,6.10^{-3}$;
- le coefficient de Manning-Strickler $n_s \simeq 0.01$.

En faisant varier le nombre de sites N de 5 à 100 sites, nous calculons les matrices de commandabilité. Le rang de ces matrices est ensuite divisé par la dimension de l'espace d'état. Le résultat est présenté sur la figure Fig. 4.1.

On peut constater que les matrices de commandabilité du système perdent leur propriété de plein rang ligne au delà de 35 sites. Une question qui peut se poser est alors de savoir si cette perte de commandabilité est numérique ou si elle provient de la méthode de discrétisation. Nous rappelons que le modèle utilisé ici est le modèle linéarisé. Une comparaison sur le même scénario avec des méthodes dites classiques permet de donner un premier élément de réponse à la question. Cette comparaison est présentée dans la suite.

4.3.2 Comparaison avec les méthodes classiques

Nous allons essayer de répondre à la question de perte de commandabilité qui apparaît dans l'étude précédente. Pour cela nous considérerons deux méthodes clas-

5. Laboratoire de Conception et d'Intégration des Systèmes, Valence.

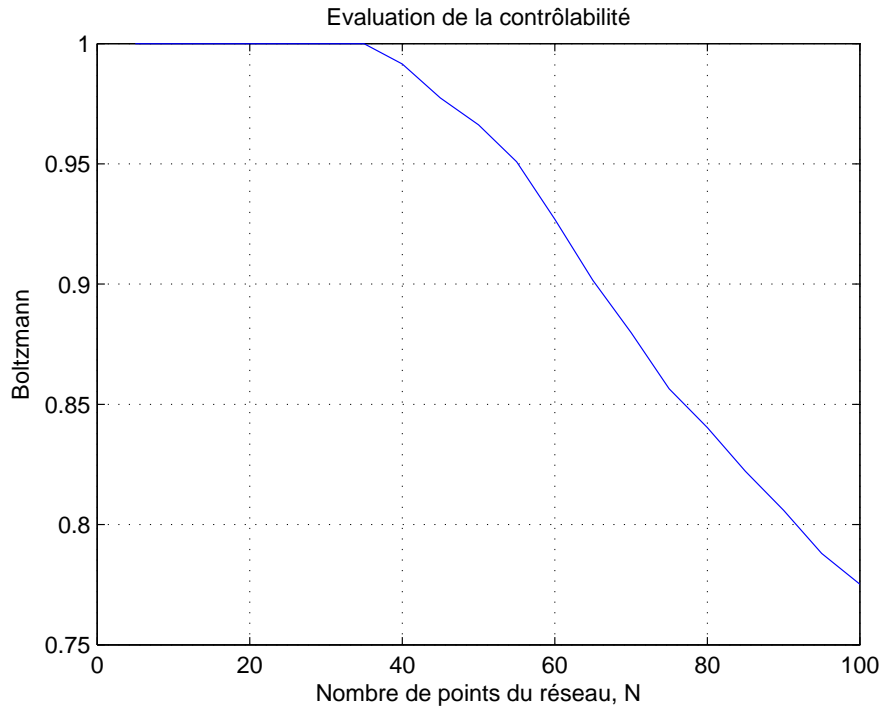


FIGURE 4.1 – Résultat de la commandabilité.

siques pour la discrétisation des équations de Saint-Venant : la méthode de collocation par points et la méthode de Preissmann. Les modèles qui vont être utilisés sont ceux présentés dans le Chapitre 2. Il s'agit des modèles linéarisés des équations de Saint-Venant discrétisées en utilisant les deux méthodes citées ci-dessus. Le résultat de la comparaison est donné sur la figure Fig. 4.2. Ce résultat est présenté, de manière plus détaillé, dans [Anda Ondo et al. \(2012\)](#).

On remarquera que la perte de propriété intervient pour toutes les méthodes. D'abord pour les méthodes de Boltzmann et de Preissmann (au delà de 35 sites), et un peu plus loin pour la méthode de collocation par points (au delà de 85 sites). Le fait que la méthode de collocation par points garde la propriété sur un plus grand nombre de sites étant du à notre avis au choix des points de collocation⁶.

Remarque 4.23

Il est impossible, du moins pour ce scénario, de considérer un maillage régulier pour la méthode de collocation par points. En effet, cette dernière perd en stabilité au delà de 10 sites, voir [Don and Gottleb \(1994\)](#).

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les concepts de commandabilité et d'observabilité en dimension finie et en dimension infinie. Un intérêt particulier a été porté à l'étude des systèmes hyperboliques dont font partie les équations de Saint-Venant. Nous avons présenté les notions de solution C^1 semi-globale, ainsi que les théorèmes

6. Leur choix pour cet exemple est celui défini dans 2.3 au chapitre 2

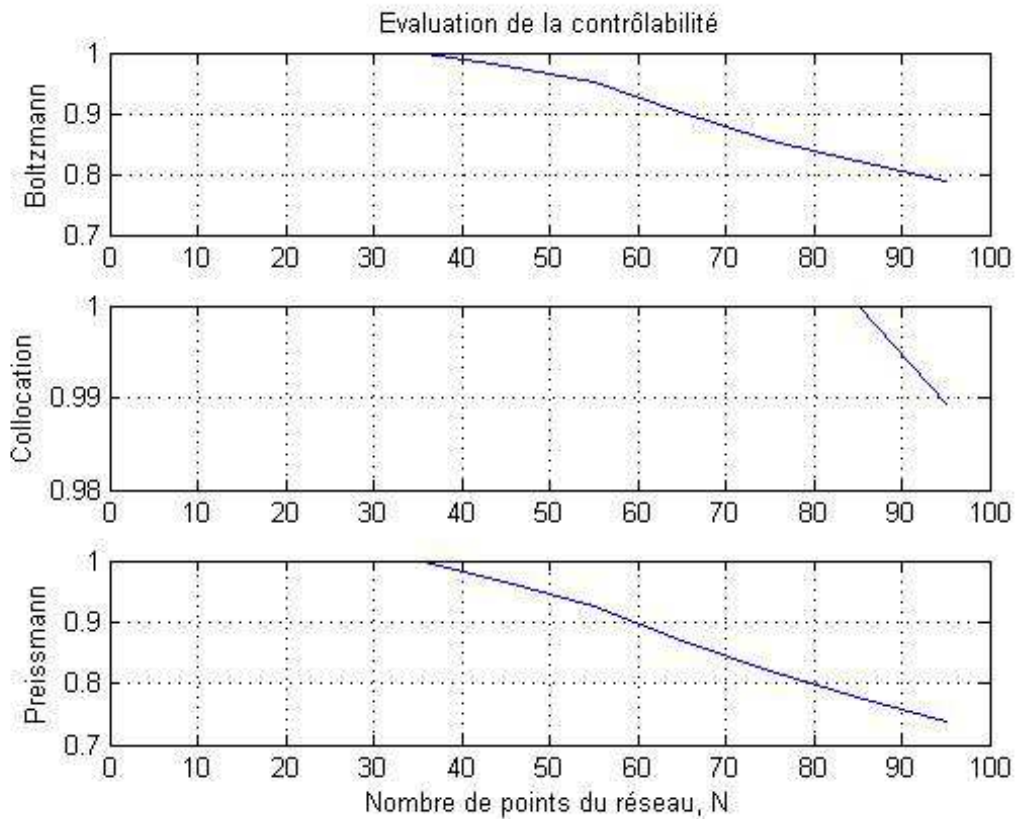


FIGURE 4.2 – Comparaison de la commandabilité.

qui permettent de conclure sur les propriétés de commandabilité et d'observabilité du système original. Des résultats sont établis pour la commandabilité et l'observabilité locales exactes. Une étude des propriétés de commandabilité de la méthode de Boltzmann sur réseau sur un modèle linéarisé a été introduite. Il s'est avéré que le modèle perdait sa propriété de commandabilité avec l'augmentation du nombre de sites (ou la diminution du pas de discrétisation). Une comparaison avec les méthodes de Preissmann et de collocation par points a permis de mettre en exergue l'existence du phénomène dans ces méthodes également.

Les résultats présentés sont basés sur les matrices de commandabilité. Cependant dans la littérature, l'étude de la commandabilité et/ou de l'observabilité peut également être faite en utilisant les concepts de grammiens. On distinguera ainsi les grammiens d'observabilité et de commandabilité. Ils présentent l'avantage de donner une information non seulement sur la propriété du système, mais aussi sur l'état de l'énergie à fournir à ce dernier pour atteindre un état désiré. Ces concepts, ainsi que leur calcul, feront l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 5

Aspects algorithmiques du calcul des grammians

5.1 Introduction

L'analyse des concepts de commandabilité et d'observabilité des modèles de Boltzmann sur réseau présentée dans le chapitre précédent repose sur les critères de Kalman. Cette analyse donne une information binaire (les critères de Kalman sont des critères algébriques) sur les propriétés du système. En effet, les critères de Kalman permettent de savoir si le système est commandable (respectivement observable) ou pas. En pratique, il est souvent nécessaire d'avoir un ordre de grandeur de l'énergie à fournir au système (lorsqu'il est commandable) ou mesurée sur le système (lorsqu'il est observable). Ces questions peuvent être résolues par les grammians de commandabilité et d'observabilité. La détermination et le calcul de ces grammians ont fait l'objet de plusieurs études, [Morris and Navasca \(2010\)](#), [Penzl \(1999/00\)](#), et plusieurs outils existent. Il est à noter, que le modèle généré par la méthode de Boltzmann sur réseau peut avoir une dimension d'espace d'état très grande (pour 100 sites par exemple, on a un modèle de 298 états et 2 entrées ou sorties). Ce constat va nous conduire à adopter des méthodes particulières pour la détermination des grammians. Ces méthodes, quelques peu différentes des outils classiques, permettront de calculer des grammians adaptés à des matrices creuses et de grande taille.

Le chapitre est organisé comme suit : dans la première section, nous introduirons la notion de grammien, en dimension finie et en dimension infinie ainsi que son rapport avec l'énergie du système. Dans la deuxième section, nous discuterons du calcul des grammians. Nous présenterons ainsi les méthodes de calcul de ces derniers, d'abord avec les outils classiques, et un peu plus loin avec les méthodes adaptées aux modèles tels que ceux générés avec la méthode de Boltzmann sur réseau. Nous ferons également des comparaisons. Nous terminerons le chapitre par un rappel des concepts abordés ainsi qu'une ouverture sur le chapitre suivant.

5.2 Les grammians

Les grammians sont des matrices semi-définies positives dont l'étude permet d'avoir une information sur la commandabilité et/ou l'observabilité du système. Ils

permettent, en plus d'avoir une information sur l'énergie à fournir au système pour le commander ou sur l'énergie qui peut être mesurée pour l'observer. Ces notions peuvent être définies aussi bien en dimension finie qu'en dimension infinie.

5.2.1 Grammiens en dimension finie

On considère le système continu

$$\dot{z}(t) = Az(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad t \geq 0, \quad (5.1)$$

$$y(t) = Cz(t), \quad (5.2)$$

$$z(0) = z_0, \quad (5.3)$$

où $z \in Z$ et $z_0 \in Z$ est l'état initial, $\mathbf{u} \in U$, $y \in Y$ avec $Z = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$ et $Y = \mathbb{R}^p$ des espaces de dimension finie définis, respectivement, comme les espaces des vecteurs d'état, d'entrée et de sortie. On suppose que $A \in \mathcal{L}(Z)$, $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(U, Z)$ et $C \in \mathcal{L}(Z, Y)$. Si $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_2([0, t]; U)$, alors $z \in C([0, t]; Z)$ et $y \in \mathcal{L}_2([0, t]; Y)$ sont donnés par

$$z(t) = e^{At}z_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds, \quad (5.4)$$

et

$$y(t) = Ce^{At}z_0 + \int_0^t Ce^{A(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds. \quad (5.5)$$

L'opérateur de commandabilité associé à la solution continue est donné par, voir chapitre 4,

$$\mathcal{B}(t)\mathbf{u} = \int_0^t e^{A(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds \quad (5.6)$$

et le grammien de commandabilité associé est donné par

$$W_c(t) = \mathcal{B}(t)\mathcal{B}^*(t) = \int_0^t e^{As}\mathbf{B}\mathbf{B}^*e^{A^*s}ds \quad (5.7)$$

L'opérateur d'observabilité associé à la sortie, quant à lui, est donné par

$$K(t)z_0 = Ce^{At}z_0, \quad (5.8)$$

et le grammien d'observabilité associé est donné par

$$W_o(t) = K^*(t)K(t) = \int_0^t e^{A^*s}C^*Ce^{As}ds. \quad (5.9)$$

En horizon infini, ces grammiens sont, respectivement, les solutions des équations de Lyapunov suivantes, voir par exemple [Chandrasekharan \(1996\)](#), [Glover \(1984\)](#), [Lancaster \(1970\)](#) :

$$AW_c + W_cA^* = -\mathbf{B}\mathbf{B}^*, \quad (5.10)$$

$$A^*W_o + W_oA = -C^*C. \quad (5.11)$$

Remarque 5.1 Les équations de Lyapunov (5.10) et (5.11) peuvent être obtenues comme suit : considérons le système continu autonome

$$\dot{z}(t) = Az(t), \quad (5.12)$$

et définissons la fonction de Lyapunov

$$V(z) = z^* P z \geq 0, \quad \text{pour tout } z \in Z, \quad (5.13)$$

avec $P = P^T \geq 0$. La condition de stabilité du système est donnée par

$$AP + PA^* < 0, \quad (5.14)$$

où P est l'inconnue (cette solution n'est pas unique lorsqu'elle existe). Il existe donc une matrice symétrique définie positive Q telle que

$$AP + PA^* = -Q. \quad (5.15)$$

La solution P dans (5.15), lorsqu'elle existe, est unique et dépend de Q . On montre enfin que lorsque P est donnée par le grammien de commandabilité en (5.7), on a

$$AW_c + W_c A^* = \int_0^\infty (Ae^{At} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A^* t} + e^{At} \mathbf{B} \mathbf{B}^* e^{A^* t} A^*) dt \quad (5.16)$$

$$= \int_0^\infty \frac{d(e^{At} \mathbf{B} \mathbf{B}^* e^{A^* t})}{dt} dt \quad (5.17)$$

$$= -\mathbf{B} \mathbf{B}^*, \quad (5.18)$$

d'où le résultat en (5.10).

En faisant un calcul sur le système dual, on retrouve l'équation de Lyapunov avec le grammien d'observabilité (5.11).

Nous avons le théorème suivant pour la commandabilité :

Théorème 5.2 Le système continu (5.1) est dit commandable si il existe un temps $t > 0$ tel que le grammien de commandabilité $W_c(t)$ soit défini positif, autrement dit si $W_c(t) > 0$.

Un théorème est également donné sur l'observabilité :

Théorème 5.3 Le système continu (5.1) augmenté de la sortie (5.2) est dit observable s'il existe un temps $t > 0$ tel que le grammien d'observabilité $W_0(t)$ soit défini positif, soit $W_0(t) > 0$.

Nous présentons également les concepts de commandabilité et d'observabilité dans le cas d'un système discret. Cela permettra notamment de mettre en avant le caractère horizon infini des grammien calculés par les équations de Lyapunov. On considère le système suivant

$$z_{k+1} = Az_k + \mathbf{B}u_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.19)$$

$$y_k = Cz_k \quad (5.20)$$

$$z(0) = z_0, \quad (5.21)$$

où $z_k \in Z$ et $z_0 \in Z$ est l'état initial, $\mathbf{u}_k \in U$, $y_k \in Y$. Si $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_2([0, t]; U)$, alors la solution $z_k \in C([0, t]; Z)$ peut être construite comme suit

$$z_1 = Az_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0 \quad (5.22)$$

$$z_2 = Az_1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_1 = A^2z_0 + \sum_{\tau=0}^1 A^{1-\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}_\tau \quad (5.23)$$

\vdots

$$z_{k+1} = A^{k+1}z_0 + \sum_{\tau=0}^k A^{k-\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}_\tau. \quad (5.24)$$

L'opérateur de commandabilité qui lui est associé est défini par

$$\mathcal{B}_d^{k+1}\mathbf{u} = \sum_{\tau=0}^k A^{k-\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}_\tau. \quad (5.25)$$

où l'indice d est mis pour signaler un opérateur discret. Le grammien de commandabilité dans ce cas sera alors donné par

$$W_{c,d}^k = \mathcal{B}_d^k(\mathcal{B}_d^k)^*. \quad (5.26)$$

Le calcul de la sortie $y_k \in \mathcal{L}_2([0, t]; Y)$ peut être fait comme suit

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cz_0 \\ CAz_0 \\ \vdots \\ CA^kz_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^k \end{bmatrix} z_0, \quad (5.27)$$

l'opérateur d'observabilité est donné par

$$K_d^k = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^k \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

et le grammien d'observabilité est défini par

$$W_{o,d}^k = (K_d^k)^* K_d^k. \quad (5.29)$$

Les grammiens de commandabilité (5.26) et d'observabilité (5.29), en horizon infini, sont solutions des équations de Lyapunov discrètes définies par

$$AW_{c,d}A^* - W_{c,d} + \mathbf{B}\mathbf{B}^* = 0, \quad (5.30)$$

$$A^*W_{o,d}A - W_{o,d} + C^*C = 0. \quad (5.31)$$

En effet, en utilisant l'équation (5.26) et en faisant tendre k vers l'infini, on a

$$W_{c,d}^\infty = \sum_{\tau=0}^{\infty} A^\tau \mathbf{B}\mathbf{B}^* (A^\tau)^* = \mathbf{B}\mathbf{B}^* + \sum_{\tau=1}^{\infty} AA^{\tau-1} \mathbf{B}\mathbf{B}^* (A^{\tau-1})^* A^* = \mathbf{B}\mathbf{B}^* + AW_{c,d}A^*, \quad (5.32)$$

et de manière analogue, en utilisant l'équation (5.29), on a

$$W_{o,d}^\infty = \sum_{\tau=0}^{\infty} (A^\tau)^* C^* C A^\tau = C^* C + \sum_{\tau=1}^{\infty} A^* (A^{\tau-1})^* C^* C A^{\tau-1} A = C^* C + A^* W_{o,d} A. \quad (5.33)$$

Dans la suite, la notion de grammien est définie pour les systèmes de dimension infinie.

5.2.2 Grammiens en dimension infinie

On considère des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles, et nous supposons, que ces dernières peuvent s'écrire sous la forme abstraite

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + \mathbf{B}u(t) & \text{(dynamique)} \\ y(t) = Cz(t) & \text{(observation)} \end{cases}, \quad (5.34)$$

avec $t \geq 0$, $z(0) = z_0$ (état initial). Nous considérons le formalisme proposé au chapitre 4. On a alors :

- pour tout $t \geq 0$, $z(t) \in Z$, $u(t) \in U$, $y(t) \in Y$ et Z , Y et U sont des espaces de Banach ;
- $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow U$ est une fonction de commande (entrée) localement intégrable ;
- $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow Y$ est une fonction d'observation (sortie) localement intégrable ;
- $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$ est générateur d'un semi-groupe fortement continu $(\Phi(t)_{t \geq 0})$;
- $\mathbf{B} : U \rightarrow Z$ est un opérateur de commande linéaire et borné ;
- $C : Z \rightarrow Y$ est un opérateur d'observation linéaire et borné.

Nous noterons par

- $\sum(A, \mathbf{B}, C)$ le système (5.34) ;
- $\sum(A, \mathbf{B}, -)$ le système (5.34) sans considération de la sortie ($C = 0$) ;
- $\sum(A, -, C)$ le système (5.34) sans considération de la commande ($\mathbf{B} = 0$).

La solution de (5.34) est donnée par

$$z(t, u, z_0) = \Phi(t)z_0 + \int_0^t \Phi(t-s)\mathbf{B}u(s)ds, \quad (5.35)$$

où $\Phi(t)$ est le semi-groupe généré par l'opérateur A .

La sortie du système est donnée par

$$y(t) = C\Phi(t)z_0 + \int_0^t C\Phi(t-s)\mathbf{B}u(s)ds. \quad (5.36)$$

L'opérateur de commandabilité associé à la solution continue est donné par :

$$\mathcal{B}(t)u = \int_0^t \Phi(t-s)\mathbf{B}u(s)ds \quad (5.37)$$

et le grammien de commandabilité associé est donné par

$$W_c(t) = \mathcal{B}(t)\mathcal{B}^*(t), \quad (5.38)$$

où \mathcal{B}^* est l'opérateur adjoint¹ de l'opérateur de commandabilité \mathcal{B} . L'opérateur d'observabilité associé à la sortie, quant à lui, est donné par

$$K(t)z_0 = C\Phi(t)z_0, \quad (5.39)$$

et le grammien d'observabilité associé est donné par

$$W_o(t) = K^*(t)K(t). \quad (5.40)$$

Ces grammiens sont, respectivement, les solutions des équations de Lyapunov suivantes

$$AW_c + W_cA^* = -\mathbf{B}\mathbf{B}^*, \quad (5.41)$$

$$A^*W_o + W_oA = -C^*C. \quad (5.42)$$

Nous avons le théorème suivant pour la commandabilité

Théoreme 5.4 *Le système continu (5.34) est dit commandable si il existe un temps $t > 0$ tel que le grammien de commandabilité $W_c(t)$ soit défini positif, autrement dit si $W_c(t) > 0$.*

Un théorème est également donné pour l'observabilité

Théoreme 5.5 *Le système continu (5.34) est dit observable s'il existe un temps $t > 0$ tel que le grammien d'observabilité $W_o(t)$ soit défini positif, soit $W_o(t) > 0$.*

Nous présentons dans la suite le lien que l'on peut faire entre les grammiens et les énergies nécessaires, soit à la commande, soit à l'observation du système.

5.2.3 Interprétation énergétique des grammiens

Comme spécifié dans l'introduction de ce chapitre, un des avantages de l'utilisation des grammiens est la possibilité de pouvoir apprécier l'énergie à fournir au système (lorsqu'il est commandable) ou l'énergie mesurée (lorsqu'il est observable). Ces énergies peuvent être reliés aux grammiens associés au système et permettre ainsi de quantifier les notions de commandabilité et d'observabilité.

Soit le système continu

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) & \text{(dynamique)} \\ y(t) = Cz(t) & \text{(observation)} \end{cases}, \quad (5.43)$$

où $z \in Z$ et $z_0 \in Z$ est l'état initial, $\mathbf{u} \in U$, $y \in Y$. La réponse du système à une entrée impulsionnelle \mathbf{u} avec une condition initiale nulle ($z_0 = 0$) est donnée par

$$z(t) = e^{At}\mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (5.44)$$

L'énergie associée à cette réponse peut être mise sous la forme d'un opérateur (grammien de commandabilité) :

$$\int_0^t z(s)z(s)^* ds = \int_0^t e^{As}\mathbf{B}\mathbf{B}^*e^{A^*s}ds = W_c(t). \quad (5.45)$$

1. En dimension finie, \mathcal{B}^* représente l'opérateur transposé de \mathcal{B} , alors qu'en dimension infinie, il définit son opérateur adjoint et vérifie $\forall z \in Z, \mathbf{u} \in U, \langle \mathbf{B}\mathbf{u}, z \rangle_Z = \langle \mathbf{u}, \mathcal{B}^*z \rangle_U$.

Le grammien de commandabilité, ainsi défini, est représenté comme l'énergie contenue dans le vecteur d'état.

Pour exprimer l'énergie à fournir au système, qui peut être différente de celle de la réponse du système, nous utilisons une interprétation dans le domaine discret. Pour cela, on considère le système suivant

$$z_{k+1} = Az_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.46)$$

$$y_k = Cz_k \quad (5.47)$$

$$z(0) = z_0, \quad (5.48)$$

où $z_k \in Z$ et $z_0 \in Z$ est l'état initial, $\mathbf{u}_k \in U$, $y_k \in Y$. Si $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_2([0, t]; U)$, alors $z_k \in C([0, t]; Z)$ et $y_k \in \mathcal{L}_2([0, t]; Y)$ et la solution forcée z_f (pour $z_0 = 0$) est donnée par

$$z_f = \mathcal{B}_d[\mathbf{u}], \quad (5.49)$$

où $[\mathbf{u}]$ représente la suite de commandes permettant d'obtenir l'état désiré z_f et \mathcal{B}_d est un opérateur discret de commandabilité. On suppose que \mathcal{B}_d admet une matrice pseudo-inverse. La suite de contrôles $[\mathbf{u}]$ peut être déterminée par

$$[\mathbf{u}] = (\mathcal{B}_d^* \mathcal{B}_d)^{-1} \mathcal{B}_d^* z_f, \quad (5.50)$$

et l'énergie associée à cette suite est donné par

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}^*][\mathbf{u}] &= ((\mathcal{B}_d^* \mathcal{B}_d)^{-1} \mathcal{B}_d^* z_f)^* (\mathcal{B}_d^* \mathcal{B}_d)^{-1} \mathcal{B}_d^* z_f \\ &= z_f^* \mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^* (\mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^*)^{-1} \mathcal{B}_d (\mathcal{B}_d^* \mathcal{B}_d)^{-1} (\mathcal{B}_d^* \mathcal{B}_d)^{-1} \mathcal{B}_d^* \mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^* (\mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^*)^{-1} z_f \\ &= z_f^* \mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^* (\mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^*)^{-1} \mathcal{B}_d (\mathcal{B}_d^* \mathcal{B}_d)^{-1} \mathcal{B}_d^* (\mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^*)^{-1} z_f \\ &= z_f^* (\mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^*)^{-1} \mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^* \mathcal{B}_d (\mathcal{B}_d^* \mathcal{B}_d)^{-1} \mathcal{B}_d^* (\mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^*)^{-1} z_f \\ &= z_f^* (\mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^* \mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^*)^{-1} z_f \\ &= z_f^* (\mathcal{B}_d \mathcal{B}_d^*)^{-1} z_f \\ &= z_f^* (W_{c,d})^{-1} z_f. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Ainsi si cette énergie est finie, on dira que le système est commandable. En effet dire que cette énergie est finie, est équivalent à avoir les valeurs propres de $W_{c,d}$ strictement supérieures à 0, et donc à avoir $W_{c,d} > 0$. Cette énergie est également l'énergie minimale à fournir au système pour l'amener de l'état initial $z_0 = 0$ à l'état désiré (final) z_f . On note également que le système sera plus facilement commandable si la valeur propre minimale du grammien de commandabilité $W_{c,d}$ est grande (énergie de commande plus petite) et moins facilement commandable si cette valeur propre est proche de 0 (énergie de commande très grande).

De manière similaire, on peut définir la suite des sorties qui est donnée par

$$[y] = K_d z_0, \quad (5.52)$$

et l'énergie qui lui est associée est donnée par

$$\begin{aligned} [y]^*[y] &= z_0^* K_d^* K_d z_0 \\ &= z_0^* W_o^d z_0. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Nous avons là aussi une relation entre l'énergie de la sortie mesurée et le grammien d'observabilité.

Nous allons dans la suite nous intéresser au calcul des grammiens. Une grande importance sera accordée à l'application sur les modèles de Boltzmann sur réseau.

5.3 Calcul des grammiens

Lors du calcul des grammiens, une différence doit être faite entre les grammiens en temps fini et les grammiens en temps infini. Si le calcul des grammiens en temps fini ou en temps infini peut se faire en utilisant les matrices ou opérateurs de commandabilité et/ou d'observabilité associés au système, les grammiens en temps infini peuvent également être obtenus comme solutions des équations algébriques de Lyapunov. En notant que lorsque le temps t tend vers l'infini, le calcul d'opérateurs ou de matrices peut s'avérer contraignant, on préférera calculer les grammiens en résolvant les équations de Lyapunov.

Dans la suite de cet exposé, nous allons discuter du calcul des grammiens solutions des équations discrètes de Lyapunov. Pour cela nous considérons le système discret représentant le modèle de Boltzmann sur réseau donné par

$$z_{k+1} = F_{lb}z_k + G_{lb}u_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.54)$$

$$y_k = H_{lb}z_k \quad (5.55)$$

$$z(0) = z_0, \quad (5.56)$$

qui conduit aux équations de Lyapunov discrètes suivantes :

$$F_{lb}W_{c,d}F_{lb}^* - W_{c,d} = -G_{lb}G_{lb}^* \quad (\text{contrôlabilité}), \quad (5.57)$$

$$F_{lb}^*W_o^dF_{lb} - W_o = -H_{lb}^*H_{lb} \quad (\text{observabilité}). \quad (5.58)$$

Étant donné la grande dimension que peuvent atteindre les matrices considérées et la structure complexe de celles-ci, une étude analytique des différents opérateurs ou des matrices s'avère rapidement délicate et ne permet pas de tirer de conclusions sur la commandabilité et l'observabilité des modèles de Boltzmann sur réseau. Une étude numérique nous a finalement semblé être le meilleur compromis. D'autant plus que plusieurs méthodes et outils existent pour ce type d'analyse. Ces méthodes et outils sont présentés dans la suite.

5.3.1 Calculs classiques

Parmi les outils liés à la résolution classique des équations de Lyapunov, nous examinerons d'abord ceux disponibles dans **Matlab**² ou des boîtes à outils intégrées. Dans le cas de notre étude, nous avons utilisé le logiciel **Matlab**. Nous avons alors pour les équations de Lyapunov la possibilité de calculer nos grammiens en essayant d'implémenter les méthodes usuelles pour la résolution d'inégalités et d'égalités matricielles linéaires (LMI/LME pour Linear Matrix Inequalities/Linear Matrix equalities). Entre autres, nous avons testé les commandes **gram** et **dlyap** (qui est la version discrète de la commande **lyap**) et les outils **Lyapack** et **Yalmip**. Nous présentons ces différents outils dans la suite.

5.3.1.1 Les commandes **gram** et **dlyap**

La commande **gram** est utilisée sous **Matlab** pour la détermination des grammiens de commandabilité ou d'observabilité. Elle fonctionne aussi bien avec les systèmes

2. <http://www.mathworks.fr/products/matlab/> :développé par **MathWorks**, qui est un langage de programmation et dispose d'un environnement de développement.

discrets qu'avec les systèmes continus. Elle nécessite la modélisation d'un espace d'état et d'une période d'échantillonnage (ou pas temporel) dans le cas d'un système discret.

La commande `dlyap` permet de résoudre les équations discrètes de Lyapunov, les équations de Sylvester, ainsi que les équations généralisée de Lyapunov. Cette commande est basée sur des sous-routines SLICOT (pour *Subroutine Library In COntrol Theory*), voir [Benner et al. \(2007\)](#), [Sima and Benner \(2008\)](#). Cependant comme nous allons le voir, cette méthode présente un résidu sur les équations discrètes de Lyapunov qui augmente avec le nombre de sites.

5.3.1.2 Calcul des grammiens avec Yalmip

Yalmip est une boîte à outil libre sous `Matlab` qui permet une résolution rapide des problèmes d'optimisation. Elle a été conçue initialement pour résoudre le problème de l'automatique robuste. Elle peut être utilisée aujourd'hui, entre autre [Löfberg \(2004\)](#), pour la programmation linéaire, la programmation quadratique, la programmation semi-définie (résolution de LMI/LME), la programmation multi-paramétrique et/ou la programmation géométrique. Elle présente comme avantage, la facilité d'installation, la facilité de prise en main (elle se base sur trois commandes), la facilité d'utilisation, un classement par catégories des différents problèmes, mais aussi la possibilité de l'utiliser avec des solveurs externes à `Matlab`.

En considérant le système (5.54), la résolution de (5.57) peut être donnée par :

```
%-----
yalmip('clear');
close all
clc
%-----
Wc,d = sdpvar(size(Flb, 1), size(Flb, 1), 'symmetric');
%-----
F=set(Wc,d >= 0)+set(Flb * Wc,d * F'lb - Wc,d + G * G' == 0);
%-----
sol = solvesdp(F);
Wc,d = double(Wc,d);
%-----
min(eig(Wc,d)) %emin
max(eig(Flb * Wc,d * F'lb - Wc,d + G * G')) %emax
checkset(F);
%-----
```

L'utilisation du précédent programme montre que le système est solvable (`emax` tend vers la précision machine et `emin` ≥ 0) uniquement lorsque l'on considère un nombre de site inférieur à quarante (40). Au delà de ce nombre, le solveur retourne une erreur (la matrice $W_{c,d}$ est composée de "NaN" (pour *Not a number*)) et nous ne pouvons récupérer ni la valeur minimale des valeurs propres du grammien, ni la valeur maximale du résidu de l'équation. Ce constat était attendu, en effet la résolution de LMI/LME sous Yalmip est basée sur des solveurs définis pour des systèmes de rang réduit, [Orsi et al. \(2006\)](#).

Un constat similaire est fait avec `SeDumi`, qui est un solveur également utilisé dans la communauté automatique.

Il nous a donc semblé que ces outils n'étaient pas adaptés pour des systèmes présentant une grande dimension. Pour palier ce problème, nous avons cherché des outils adaptés aux systèmes de grande dimension.

5.3.1.3 Calcul des grammiens avec Lyapack

Lyapack, pour "Lyapunov package" [Penzl \(1999\)](#), est une boîte à outil de **Matlab** prévue pour résoudre les problèmes de grande dimensions concernant les équations de Lyapunov, de Riccati, mais aussi les problèmes de réduction de modèle et de commande optimale linéaire-quadratique. Bien qu'à l'origine **Lyapack** soit destinée aux systèmes continus, les auteurs proposent d'utiliser une transformation de Cayley pour ramener l'équation discrète de Lyapunov sous forme continue.

Considérons le système continu

$$\dot{z}(t) = Az(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (5.59)$$

$$y(t) = Cz(t) \quad (5.60)$$

$$z_0 = z(0), \quad (5.61)$$

où $z \in Z$ et $z_0 \in Z$ est l'état initial, $u \in U$, $y \in Y$. La transformation de Cayley, voir [Haynes \(1991\)](#), permet de passer des équations continues de Lyapunov aux équations discrètes de Lyapunov et vice-versa. La transformation de Cayley de la matrice A , que nous noterons \mathcal{C}_A est définie comme suit

$$\mathcal{C}_A = (I + A)(I - A)^{-1}. \quad (5.62)$$

Le calcul détaillé du passage de l'équation continue vers l'équation discrète est donné par

$$\begin{aligned} & AW_c + W_c A + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = 0 \\ \Leftrightarrow & (\mathcal{C}_A - I)(\mathcal{C}_A + I)^{-1}W_c + W_c(\mathcal{C}_A + I)^{-T}(\mathcal{C}_A - I)^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = 0 \\ \Leftrightarrow & (\mathcal{C}_A - I)W_c(\mathcal{C}_A + I)^T + (\mathcal{C}_A + I)W_c(\mathcal{C}_A - I)^T + (\mathcal{C}_A + I)\mathbf{B}\mathbf{B}^T(\mathcal{C}_A + I)^T = 0 \\ \Leftrightarrow & W_c - \mathcal{C}_A W_c \mathcal{C}_A^T - 2(I - A)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{B}^T(I - A)^{-T} = 0. \end{aligned}$$

Le calcul³ conduit à $F_{lb} = \mathcal{C}_A$ et $G_{lb} = \sqrt{2}(I - A)^{-1}B$. Le cheminement inverse (de l'équation discrète de Lyapunov vers l'équation continue) donne, par identification

$$A = (F_{lb} - I)(F_{lb} + I)^{-1}, \quad (5.63)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(I - A)G_{lb}. \quad (5.64)$$

La résolution de l'équation de Lyapunov continue en utilisant l'algorithme **LRCF-ADI** (pour *Low Rank Cholesky Factor - Alternating Direction Implicit*), [Penzl \(1999\)](#), conduit, pour une discrétisation correspondant à 200 sites (soit environ 600 états), à une erreur de $1.33e - 02$ en norme de Frobenius des équations données par

$$\|AW_c + W_c A^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T\|_F \quad (5.65)$$

3. On utilise le fait que $A = (\mathcal{C}_A - I)(\mathcal{C}_A + I)^{-1}$, que $(\mathcal{C}_A - I)(\mathcal{C}_A + I)^{-1} = (\mathcal{C}_A + I)^{-1}(\mathcal{C}_A - I)$ et que $(\mathcal{C}_A + I) = 2(I - A)^{-1}$.

et

$$\|F_{lb}W_{c,d}F_{lb}^T - W_{c,d} + GG^T\|_F \quad (5.66)$$

où $W_{c,d} = W_c$.

Il nous a finalement semblé plus approprié d'utiliser des méthodes basées sur des résolutions itératives. Cette méthode est présentée dans la suite.

5.3.2 Méthodes de point fixe

La résolution numérique de l'équation de Stein, dont l'équation discrète de Lyapunov est un cas spécial, a connu un développement récent ces dernières décennies, et un certain nombre d'algorithmes basés sur des méthodes de point fixe ont fait leur apparition (voir [Benner et al. \(1999\)](#) et les références qui y sont).

Nous rappelons que les équations de Stein sont de la forme

$$APA^T - P + C = 0, \quad (5.67)$$

où P est la matrice à déterminer. Il n'est pas difficile de voir qu'en remplaçant dans (5.67) P par $W_{c,d}$, A par F_{lb} et C par GG^T , on retrouve notre équation discrète de Lyapunov. La résolution de cette équation peut être faite en utilisant un algorithme de point fixe. Ce type d'algorithme présente l'avantage d'être particulièrement bien adapté aux problèmes de matrices creuses et de grande dimension, et ainsi au calcul de grammiens concernant ces matrices.

Considérons le système discret suivant

$$z_{k+1} = F_{lb}z_k + G_{lb}u_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.68)$$

$$y_k = H_{lb}z_k \quad (5.69)$$

$$z(0) = z_0. \quad (5.70)$$

L'équation discrète de Lyapunov donnée par

$$F_{lb}W_{c,d}F_{lb}^T - W_{c,d} + G_{lb}G_{lb}^T = 0, \quad (5.71)$$

peut être résolue en utilisant l'itération de Smith, qui se présente comme suit, voir [Benner et al. \(1999\)](#) :

- réécrire (5.71) sous la forme $W_{c,d} = F_{lb}W_{c,d}F_{lb}^T + G_{lb}G_{lb}^T$;
- définir l'itération de type point fixe en posant :

$$W_{c,d}^0 = G_{lb}G_{lb}^T, \quad (5.72)$$

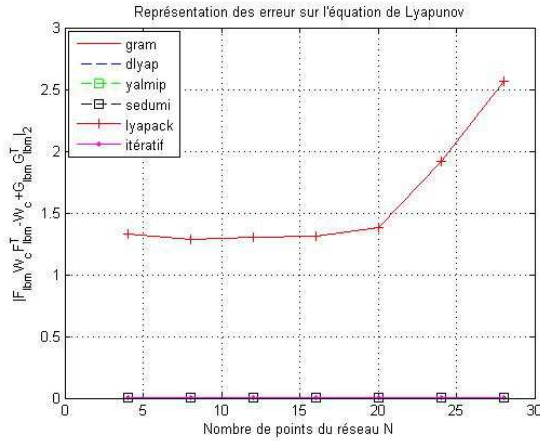
$$W_{c,d}^k = F_{lb}W_{c,d}^{k-1}F_{lb}^T + G_{lb}G_{lb}^T, \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots \quad (5.73)$$

Si le spectre de F_{lb} , $\sigma(F_{lb})$, est contenu dans le cercle unitaire (le système défini par (5.71) est stable), alors l'erreur d'estimation de l'équation entre deux itérations donnée par

$$e_k = \|W_{c,d}^k - W_{c,d}^{k-1}\|_F, \quad (5.74)$$

tend à s'annuler et la norme Frobenius de (5.71) par la même occasion. En effet, il est à noter, voir [Benner et al. \(1999\)](#), que pour $\sigma(F_{lb}) < 1$, il existe des constantes $0 < \alpha_1$ et $0 < \alpha_2 < 1$ telles que

$$\|W_{c,d} - W_{c,d}^k\|_2 \leq \alpha_1 \|G_{lb}G_{lb}^T\|_2 (1 - \alpha_2)^{-1} \alpha_2^{2^k}, \quad (5.75)$$



(a) Figure normale

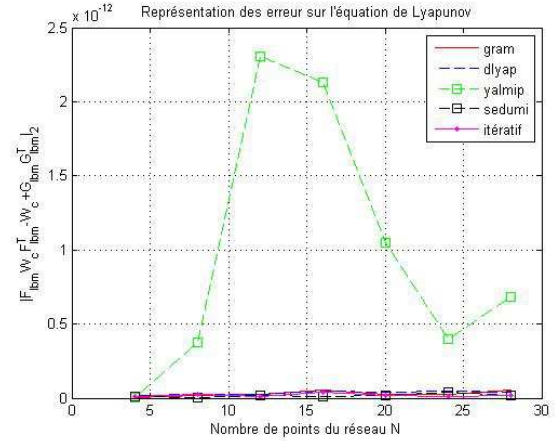

 (b) Zoom sur les méthodes *dlyap*, *gram* et *itérative*.

 FIGURE 5.1 – Résidu sur la résolution des équations $N \leq 30$

ce qui montre bien la convergence lorsque F_{lb} est une matrice de Schur (matrice stable).

En appliquant cet algorithme, la norme de Frobenius de l'équation discrète de Lyapunov (5.71) avec 200 sites converge vers une précision de 10^{-16} (précision machine).

5.3.3 Résultats et comparaisons

Dans cette section, nous allons présenter une comparaison entre les différents modes de calcul. Le résultat de cette comparaison nous permettra de choisir une méthode pour le calcul des grammians et de leurs spectres.

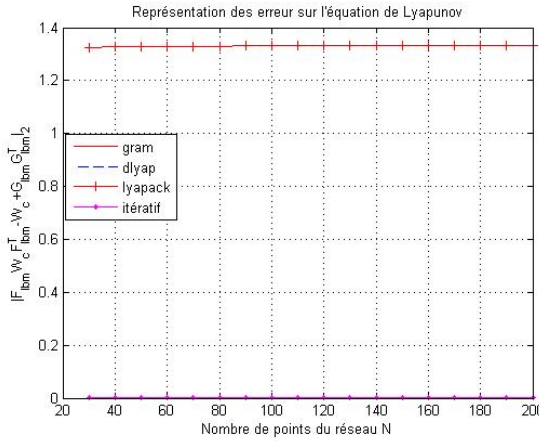
5.3.3.1 Comparaison des modes de calcul

La comparaison est basée sur le calcul du résidu généré par la solution de l'équation discrète de Lyapunov. La solution est calculée suivant les divers modes présentés plus haut.

Les premiers constats nous obligent à laisser de côté certaines méthodes de résolution dès que le nombre de sites va au delà de 30. Ainsi les méthodes de calcul avec *Sedumi* et *Yalmip* n'arrivent plus à fournir de solution. On observe, voir Fig. 5.1a-5.1b, que mis à part la méthode de calcul basée sur *Lyapack* (qui, nous le rappelons, est destinée à des systèmes de grande taille), pour un nombre de sites $N \leq 30$, les méthodes de résolution fournissent une erreur du même ordre (10^{-13} , avec la méthode d'itération, il est possible d'atteindre des ordres de grandeur plus petit.).

Pour un nombre de sites $30 \leq N \leq 200$, nous ne considérons plus les méthodes de résolution par *Sedumi* ou *Yalmip*. La méthode de résolution avec *Lyapack* n'est toujours pas adaptée, voir Fig 5.2a. On observe sur les méthodes restantes, que la méthode par itération de point fixe est celle qui conserve la meilleure précision dans la résolution de l'équation discrète de Lyapunov, voir Fig. 5.2b.

Au delà d'un nombre de sites $N \geq 200$ (nous nous sommes arrêtés à 500 sites), la méthode de résolution par itération de point fixe fournit encore la meilleure pré-



(a) Figure normale

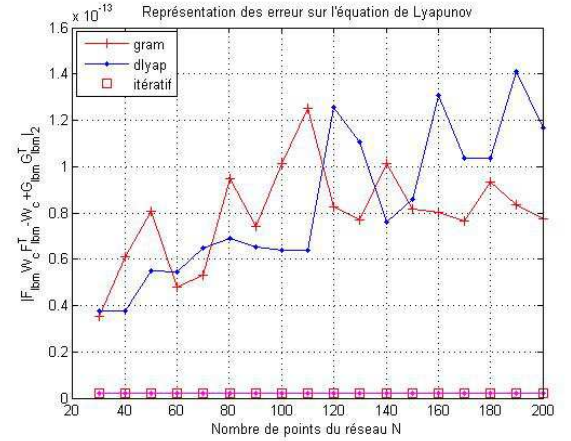
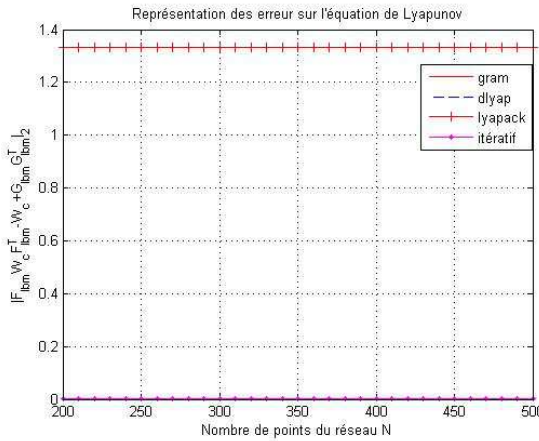

 (b) Zoom sur les méthodes *dlyap*, *gram* et *itérative*.

 FIGURE 5.2 – Résidu sur la résolution des équations pour $30 \leq N \leq 200$.


(a) Figure normale.

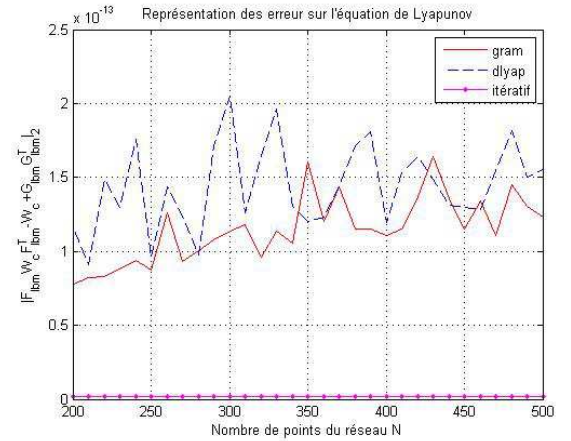

 (b) Zoom sur les méthodes *dlyap*, *gram* et *itérative*.

 FIGURE 5.3 – Résidu sur la résolution des équations pour $200 \leq N \leq 500$.

cision sur la résolution de l'équation discrète de Lyapunov. L'erreur faite avec cette méthode est de l'ordre de la précision machine (10^{-16}). Le résidu dans la méthode avec *Lyapack* est aux alentours de 1.3 (pour un résidu sur l'équation continue de Lyapunov de l'ordre de $1.3 \cdot 10^{-2}$), voir Fig. 5.3a-5.3b. Les résidus avec les autres méthodes sont 1000 fois plus grande qu'avec la méthode d'itération par point fixe, et cela s'amplifie avec l'augmentation du nombre de sites.

Le résidu sur la résolution de l'équation discrète de Lyapunov par la méthode de point fixe est constamment aux alentours de la précision machine (il est toujours possible qu'on la ramène dans cet ordre tant que le système est stable). Pour cette raison, nous l'utiliserons dans la suite pour observer la variation de l'énergie du système lorsqu'on augmente le nombre de sites.

Remarque 5.6 Nous signalons que dans ces comparaisons, nous évaluons la précision de la résolution des équations discrètes de Lyapunov. L'objectif est de choisir la méthode qui nous fournit la solution qui résout les équations avec le plus petit résidu

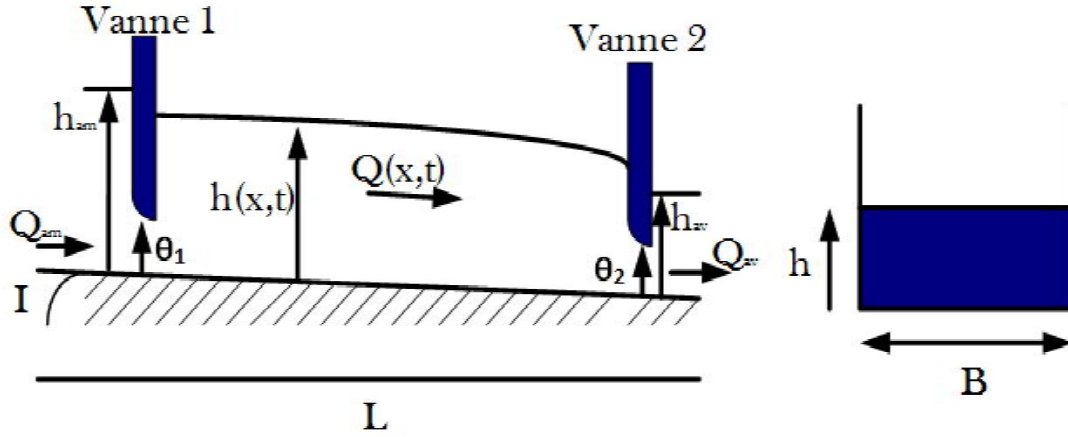


FIGURE 5.4 – Canal avec un bief

possible. Nous ne nous intéressons donc pas au temps de calcul nécessaire pour la résolution des équations. Certaines méthodes sont, de ce point de vue, plus lentes que d'autres, notamment la méthode d'itération par point fixe.

5.3.3.2 Résultats

Pour cette étude, nous considérons le canal représenté sur Fig 5.4 discrétisé avec un réseau $D1Q3$ de n sites. Les valeurs numériques des paramètres du canal correspondent au micro-canal du laboratoire LCIS : accélération gravitationnelle $g = 9.81ms^{-2}$, largeur $B = 0.1m$, longueur $L = 8m$, coefficient de Manning $n_m = 0.01s/m^{1/3}$ et temps de relaxation $\tau = 1.2s$. Les paramètres du modèle sont définis tels que $\delta x = L/(N - 1)$ et $\delta t = \delta x/2$. Cela correspond à une vitesse numérique du réseau de $2m.s^{-1}$ suffisante pour la stabilité de la méthode de Boltzmann sur réseau.

Dans le paragraphe suivant, l'effet de l'augmentation du nombre de sites sur l'énergie à fournir au système est présenté.

Nous considérons le système avec un état initial nul (en variables linéarisées) et nous calculons l'énergie minimale du signal d'entrée à fournir pour atteindre l'état donné par

$$x_r = 0.033 * [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T \quad (5.76)$$

avec $\dim(x_r) = m$ et $m = N - 2$ la dimension de l'état d'espace Z_{ib}^r . Nous considérons également pour simplifier, des conditions de bord périodique. L'état donné par le vecteur x_r définit bien un état stable du système, bien que différent de l'état de linéarisation (h_e, u_e) utilisé.

Nous espérons que pour le système considéré, l'état x_r serait atteignable avec un signal de commande à énergie finie, quelque soit le nombre de sites. En dépit du fait que le modèle est construit avec un système ayant des valeurs macroscopiques identiques (masse, moment, énergie), nous observons numériquement, voir figure 5.5, que l'énergie augmente avec le nombre de sites. La remarque s'applique aussi bien avec l'énergie minimale, voir Fig. 5.5a, qu'avec la trace du grammien représenté, voir Fig. 5.5b. Les figures sont obtenues avec les grammien calculés par l'algorithme itératif présenté précédemment (algorithme de Smith, voir Benner et al. (2008)) avec une erreur résiduelle dans l'équation de Lyapunov proche de la précision machine.

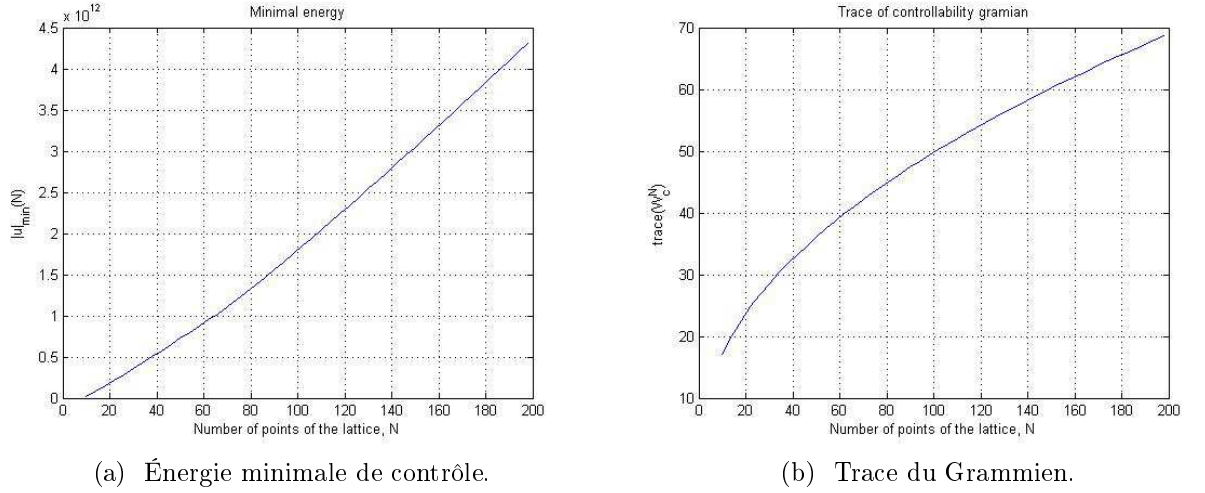


FIGURE 5.5 – Variation des énergies dans le système.

5.4 Conclusion

Nous avons traité dans ce chapitre des aspects algorithmiques du calcul des grammiens. Nous avons montré que la détermination des énergies dans le système peut se ramener à la détermination des grammiens. Nous avons présenté des méthodes de détermination de grammiens basées sur l'utilisation de commandes (*dlyap*, *gram*) et de boîtes à outils (*Yalmip*, *Sedumi*) disponibles sur *Matlab*, ainsi que des méthodes de résolution des équations discrètes de Lyapunov particulièrement adaptées à des systèmes de grande taille dont les matrices sont creuses (*Lyapack*, *itération par point fixe*). Au travers d'une comparaison, utilisant les matrices associées aux modèles de Boltzmann sur un exemple concret, nous avons montré que la méthode d'itération par point fixe était celle qui restait fiable sur toutes les gammes de variation du nombre de sites de discrétisation ($0 \leq N \leq 500$). En utilisant les grammiens obtenus par cette méthode, l'énergie du système a été évaluée. Cette énergie s'avère, numériquement, non bornée, bien que l'état de consigne considéré du système soit uniforme.

Les résultats obtenus dans ce chapitre montrent clairement que la perte de propriétés (perte de commandabilité, augmentation de l'énergie pour atteindre un même état) dépend du pas de discrétisation et non de la méthode ou du moyen utilisé. Nous allons dans le chapitre à venir tenter de remédier à ce problème.

Chapitre 6

Commandabilité uniforme des modèles de Boltzmann sur réseau

6.1 Introduction

Après les discussions des chapitres précédents, un constat s'impose : pour un système discret donné, le calcul des opérateurs discrets ne permet pas de conclure sur la commandabilité du système. On peut aussi remarquer que suivant la méthode de discrétisation (Preissmann, Collocation orthogonale ou méthode de Boltzmann sur réseau) ou suivant le critère de détermination (Kalman ou grammien), la commandabilité se perd différemment (lorsque le nombre de sites augmente), bien que l'on ait considéré les mêmes paramètres pour le système.

On se propose dans ce chapitre d'aborder le problème de la commandabilité par le biais des propriétés de conservation de l'énergie. On examinera dans quelle mesure une discrétisation consistante en terme d'énergie (conservation des équations de bilan) permet de se prémunir contre une perte de commandabilité liée à la discrétisation. Il s'agira d'utiliser l'inégalité d'observabilité, voir [Zuazua \(2002, 2005a\)](#) et les références qui y sont, et de discuter des énergies fournies et présentes dans ce système. Cette approche a déjà été utilisée, notamment avec les différences finies, sur le problème des équations des ondes par E. Zuazua et ces collaborateurs, voir [Zuazua \(2005a\)](#). Nous utiliserons les résultats présentés au chapitre 4 pour traiter la commandabilité uniforme des modèles de Boltzmann sur réseau.

Le chapitre est organisé comme suit : en section 6.2, nous présentons les notions permettant de poser le problème, on y définira notamment la notion de commandabilité uniforme. Le cas de la méthode de Boltzmann sur réseau est étudié dans la section 6.3 sous l'angle de la commandabilité uniforme. Enfin, le chapitre se terminera par une discussion et un rappel des résultats.

6.2 Généralités

6.2.1 Définition de la commandabilité uniforme

Considérons le système abstrait de dimension infinie \mathcal{S} représenté par

$$\dot{z}(t) = Az(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (6.1)$$

$$z(0) = z_0 \quad (6.2)$$

où $z(t)$ le vecteur d'état appartient à un espace de Hilbert Z , $u(t)$ le vecteur de commande appartient à l'espace de Hilbert U , \mathbf{B} est l'opérateur de commande sur U et A est l'opérateur de dynamique générateur d'un semi-groupe $\Phi(t)$ fortement continu. La solution du système est donnée par

$$z(T) = \Phi(T)z_0 + \int_0^T \Phi(T-t)\mathbf{B}u(t)dt. \quad (6.3)$$

On suppose que le système \mathcal{S} est commandable en temps T , c'est à dire que pour tout état désiré $z_1 \in Z$ et tout état initial $z_0 \in Z$, il existe une commande $u \in L^2(0, T; U)$ permettant de passer de z_0 à z_1 en temps T fini ($z(T) = z_1$).

La discrétisation du système (6.1) conduit à la définition d'une famille de systèmes commandés de dimension finie ($\mathcal{S}_{\delta x}$) donnée par

$$z_{\delta x}(k+1) = A_{\delta x}z_{\delta x}(k) + B_{\delta x}u_{\delta x}, \quad (6.4)$$

$$z_{\delta x}(0) = z_{\delta x,0} \quad (6.5)$$

avec $z_{\delta x} \in Z_{\delta x}$ et $u_{\delta x} \in L^2(0, T; U_{\delta x})$ où nous considérons :

- $Z_{\delta x}, U_{\delta x}$: des espaces d'approximation de dimension finie ;
- $A_{\delta x} : Z_{\delta x} \rightarrow Z_{\delta x}$, un opérateur linéaire de dimension finie, approximation du générateur A ;
- $\mathbf{B}_{\delta x} : U_{\delta x} \rightarrow Z_{\delta x}$, un opérateur linéaire de dimension finie, approximation de l'opérateur de commande \mathbf{B} .

L'investigation de la commandabilité uniforme se définit par la recherche de commandes $u_{\delta x}$, pour $0 < \delta x < \delta x_0$, convergeant vers la commande u quand le pas de discrétisation δx tend vers zéro, et telles que les trajectoires associées $z_{\delta x}(t)$, solutions de (6.4), convergent vers $z(t)$ donnée en (6.3).

6.2.2 Les outils pour sa mise en œuvre

Pour discuter de la commandabilité uniforme des systèmes à paramètres répartis, nous ferons appel à l'inégalité d'observabilité. Nous considérons le système (6.1) de dimension infinie, le grammien de commandabilité au temps T est défini par

$$W_c = \int_0^T \Phi(T-t)\mathbf{B}\mathbf{B}^*\Phi^*(T-t)dt, \quad (6.6)$$

avec Φ le semi-groupe fortement continu généré par A .

Le système est dit commandable au temps T si et seulement si le grammien de commandabilité (6.6) est inversible. Malheureusement comme nous l'avons vu

dans les chapitres précédents, cette caractérisation utilisant les grammien, est difficile à mettre en œuvre lorsque le pas de discrétisation décroît. Nous allons plutôt dans ce chapitre utiliser une caractérisation de la commandabilité basée sur l'inégalité d'observabilité. Elle a l'avantage de permettre de relier la commandabilité du système au rapport entre la variation d'énergie dans le système et la variation de l'énergie de commande. Le théorème suivant sur la commandabilité du système (basé sur l'inégalité d'observabilité) est donné, [Affi et al. \(2008\)](#), [Labbé and Trélat \(2006\)](#), [Lions \(1988\)](#)

Théorème 6.1 *Le système (6.1) est exactement commandable en temps T si et seulement si il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $z \in \mathcal{D}(A)$, on ait*

$$\int_0^T \|\mathbf{B}^* \Phi^*(t)z\|_U^2 \geq \alpha \|z\|_Z^2 \quad (6.7)$$

où $\|\cdot\|_U$ et $\|\cdot\|_Z$ sont les normes dans les espaces de commande et d'état, respectivement.

L'inégalité (6.7) est connue comme l'inégalité d'observabilité, voir [Curtain and Zwart \(1995\)](#). Un point important dans son utilisation est le fait que les normes exprimées, respectivement dans les espaces de commande et d'état, peuvent s'interpréter comme les énergies de la commande et celle de l'état. D'ailleurs, l'inégalité d'observabilité est souvent interprétée comme l'existence d'une constante α permettant de majorer l'énergie de la solution par celle d'une commande. Il est possible, en utilisant le principe de dualité, d'aborder le problème d'observabilité.

Nous définirons dans la suite des versions discrètes de l'inégalité d'observabilité adaptées à l'étude de la méthode de Boltzmann sur réseau. Ces définitions permettront de conclure sur la commandabilité ou non du système.

6.3 Cas des modèles LB

L'idée dans cette section est d'analyser sous l'angle de la commandabilité et de l'observabilité les modèles de Boltzmann sur réseau lorsque le pas de discrétisation est diminué progressivement.

Dans ce but nous présenterons deux manières de définir les entrées (variables de commande) et les sorties (variables de mesure) du système, et apporterons la preuve de la perte de propriétés dans un cas et la conservation de ces mêmes propriétés dans l'autre.

Nous considérons le système linéarisé des équations de Saint-Venant représenté sous forme Hamiltonienne

$$\partial_t z(x, t) = \mathcal{J} \mathcal{L} z(x, t), \quad (6.8)$$

$$z(x, 0) = z_0(x), \quad (6.9)$$

où $z \in Z$ est le vecteur d'état (vecteur des variables d'énergie), \mathcal{L} est une matrice bornée, symétrique et définie positive, \mathcal{J} est un opérateur différentiel d'ordre 1, formellement anti-symétrique ($\mathcal{J}^* = -\mathcal{J}$), voir chapitre 4. Nous présenterons dans la suite les différents opérateurs de commande et d'observation correspondant à nos deux cas d'études.

6.3.1 Opérateurs discrets et perte de propriétés

Considérons le système défini en (6.8), nous avons montré dans le chapitre 2 qu'il était possible d'écrire un modèle LB, après linéarisation, sous la forme d'une famille de système (\mathcal{S}_δ) donnée par

$$z_{\delta x}(k+1) = F_{\delta x} z_{\delta x}(k) + \mathbf{B}_{\delta x} \mathbf{u}_{\delta x}(k), \quad (6.10)$$

$$z_{\delta x}(0) = z_{\delta x,0} \quad (6.11)$$

avec $z_{\delta x}$ le vecteur d'espace d'état de dimension finie, $\mathbf{u}_{\delta x}$ le vecteur de commandes et δx le pas spatial de discrétisation. Les opérateurs $F_{\delta x}$ et $\mathbf{B}_{\delta x}$ sont définis dans le chapitre 2 (voir (2.64)).

Le premier résultat que nous présentons ici concerne la convergence (pour un temps T fixé) de l'énergie dans le système avec la diminution du pas de discrétisation. Il est énoncé par le lemme suivant.

Lemme 6.2 *L'énergie calculée à partir des distributions f_i , solutions des équations de Boltzmann sur réseau, converge vers l'énergie du système avec une erreur en $\mathcal{O}(\delta x^3)$, où δx est le pas spatial de discrétisation.*

Preuve 6.3 *Il est bien connu que la solution (h, u) des équations de Saint-Venant (1.1)-(1.2) peut être approchée par les variables macroscopiques \bar{h} et \bar{u} définies par les solutions des équations de Boltzmann sur réseau, voir [Pham et al. \(2010\)](#), [Zhou \(2004a\)](#), telles que*

$$\bar{h} = h + \mathcal{O}(\delta x^3), \quad (6.12)$$

et

$$\bar{u} = u + \mathcal{O}(\delta x^3). \quad (6.13)$$

Nous avons donc

$$\bar{h}\bar{u} = hu + \mathcal{O}(\delta x^3) \quad (6.14)$$

$$\bar{h}^2 = h^2 + \mathcal{O}(\delta x^3) \quad (6.15)$$

$$\bar{u}^2 = u^2 + \mathcal{O}(\delta x^3) \quad (6.16)$$

$$\bar{h}\bar{u}^2 = hu^2 + \mathcal{O}(\delta x^3) \quad (6.17)$$

et l'énergie sera donnée par

$$\begin{aligned} \bar{E}(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L (\rho g B \bar{h}^2 - 2\rho g B I \bar{h}x + \rho B \bar{h} \bar{u}^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L (\rho g B h^2 - 2\rho g B I h x + \rho B h u^2 + \mathcal{O}(\delta x^3)) dx \\ &= E(t) + \mathcal{O}(\delta x^3) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Le deuxième résultat est lié à la décroissance de l'énergie sur un site commandé lorsque le pas de discrétisation diminue. Il est donné par le lemme suivant

Lemme 6.4 *L'énergie dans le site situé à l'extrémité $x = L$ notée, $\Gamma(T)$, donnée par $\int_0^T P(L, t) dt$ peut être approchée par*

$$\Gamma_{\delta x}(T) = \delta x \sum_{j=0}^m P_{\delta x}(L, j \cdot \delta t) \delta t, \quad (6.19)$$

et cette approximation tend vers 0 lorsque $\delta x \rightarrow 0$, avec $T = m \cdot \delta t$.

Preuve 6.5 *L'idée de la preuve consiste à montrer que pour un pas spatial δx fixe, si $\delta x \sum_{j=0}^m P_{\delta x}(L, j \cdot \delta t)$ est une bonne approximation de $\int_0^T P(L, t) dt$, avec $T = m \cdot \delta t$, alors pour tout $\delta_k t$ tel que $\delta_k t = \frac{\delta t}{k}$, avec k pris tel que $k = 2^p$ et $p \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$\sum_{j=0}^{k \cdot m} P_{\delta_k x}(L, j \cdot \delta_k t) \delta_k t = \sum_{j=0}^m P_{\delta x}(L, j \cdot \delta t) \delta t, \quad (6.20)$$

alors, il est aisé de conclure que l'approximation de l'énergie sur le site concerné lorsque $k \rightarrow \infty$ est telle que

$$\delta_k x \sum_{j=0}^{k \cdot m} P_{\delta_k x}(L, j \cdot \delta_k t) \delta_k t \rightarrow 0. \quad (6.21)$$

Ce qui conclut la preuve.

Nous pouvons alors conclure sur la commandabilité uniforme de la famille $(\mathcal{S}_{\delta x})$ définie en (6.10). Nous avons la proposition suivante.

Proposition 6.6 *Pour tout $T > 0$, nous avons*

$$\left[\frac{E_{\delta x}(0)}{\Gamma_{\delta x}(T)} \right] \rightarrow \infty \text{ quand } \delta x \rightarrow 0, \quad (6.22)$$

avec $T = m \cdot \delta t$.

Dans cette proposition, $E_{\delta x}(0)$ est l'énergie initiale calculée avec les solutions de (6.10) et $\Gamma_{\delta x}(T)$ est l'énergie discrète concentrée au site à l'extrémité $x = L$. Le résultat est la conséquence directe des deux précédents lemmes.

Nous rappelons que l'inégalité d'observabilité peut être donnée par

$$\|z(T)\|_Z^2 \leq c(T) \int_0^T \|\mathbf{B}^* \Phi^*(t) z(t)\|_U^2 dt, \quad (6.23)$$

où $\|\cdot\|_Z$ et $\|\cdot\|_U$ sont les normes dans les espaces d'état et de commande, respectivement. $c(T)$ est appelée constante d'observation. La relation (6.22) peut être vue comme une inégalité d'observabilité discrète. L'utilisation de la proposition 6.6 permet de conclure que la constante d'observation $c(T)$ diverge lorsque le pas de discrétisation δx tend vers 0. La conséquence directe est que la famille de système $(\mathcal{S}_{\delta x})$ n'est pas uniformément commandable. Nous le montrerons d'ailleurs à travers un cas d'étude.

Remarque 6.7 *Le résultat précédent peut s'étendre à l'étude de l'observabilité du système en utilisant la famille $(\mathcal{S}_{\delta x}^*)$ du système adjoint définie par*

$$z_{\delta x}(k+1) = F_{\delta x}^* z_{\delta x}(k), \quad (6.24)$$

$$z_{\delta x}(0) = z_{\delta x,0}, \quad (6.25)$$

$$y_{\delta x}(k) = B_{\delta x}^* z_{\delta x}(k). \quad (6.26)$$

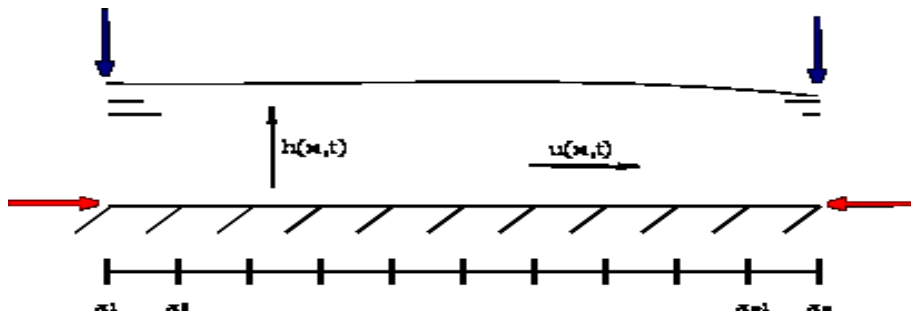


FIGURE 6.1 – Bief discrétisé avec des entrées (rouge), et des sorties (mesures en bleu).

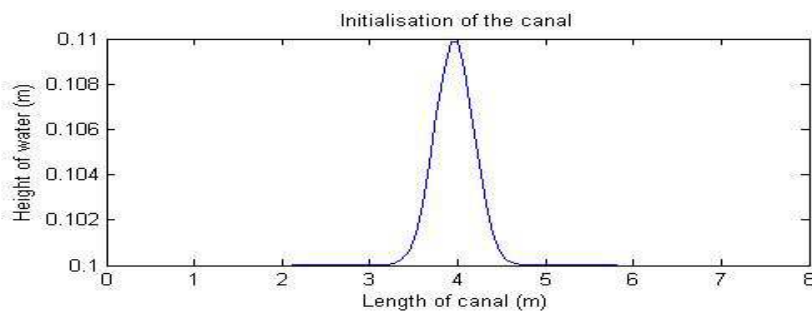


FIGURE 6.2 – État initial du canal, réponse libre.

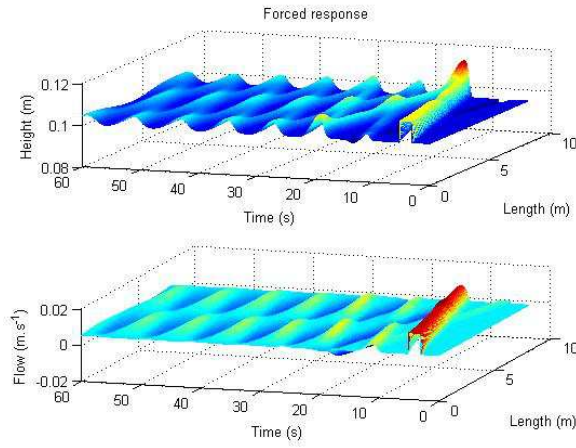
Nous terminons cette section en présentant un exemple de simulation. Nous considérons le canal de la figure 6.1, avec N sites. Pour la simulation, nous supposons que la pente de fond est nulle ($I = 0$) et nous utilisons les paramètres du micro-canal expérimental du LCIS, voir [Anda Ondo et al. \(2011a, 2012\)](#), [Hamroun \(2009\)](#). Le pas spatial est donné par $\delta x = L/N$, et le pas temporel par $\delta t = \delta x/2$ permettant d'assurer la stabilité numérique du modèle dans le cas d'un écoulement fluvial, [Zhou \(2004a\)](#). Le temps de relaxation est donné par $\tau = 0.8s$.

Nous considérons deux scénarios, le premier pour la commandabilité (réponse forcée) et le second pour l'observabilité. Ces scénarios sont résumés ci-dessous.

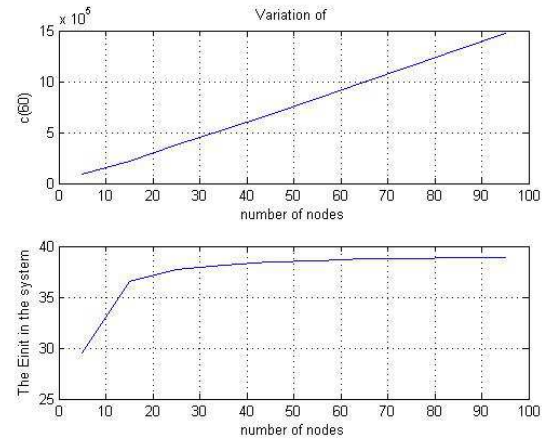
1. Pour l'étude de la commandabilité, on initialise le système avec un profil d'équilibre uniforme, tel que le débit $Q_{in}(t) = Q(x_1, t) = 5 \cdot 10^{-3} m s^{-1}$ au premier site soit égal à celui du dernier site $Q_{out}(t) = Q(x_N, t)$. Une onde de hauteur est par la suite créée en amont du bief par ouverture progressive de la vanne amont entre les instants $2s$ et $3s$, puis la vanne est remise à son état initial. La simulation est ensuite effectuée sur $60s$;
2. pour l'étude de l'observabilité, on initialise le système avec une bosse au milieu du bief (figure 6.2), et on laisse la simulation se faire sur $60s$.

Les résultats obtenus sont donnés sur la figure 6.3 pour la commandabilité, et sur la figure 6.4 pour l'observabilité. Dans les deux cas, on note la divergence de la constante d'observation $c(60)$ (figure 6.3b et figure 6.4b) avec la diminution du pas de discrétisation (augmentation du nombre de sites), alors que dans le même temps, l'énergie initiale dans le système converge.

Nous proposons dans la section suivante, une approche utilisant des variables de ports pour venir à bout de la perte de commandabilité.

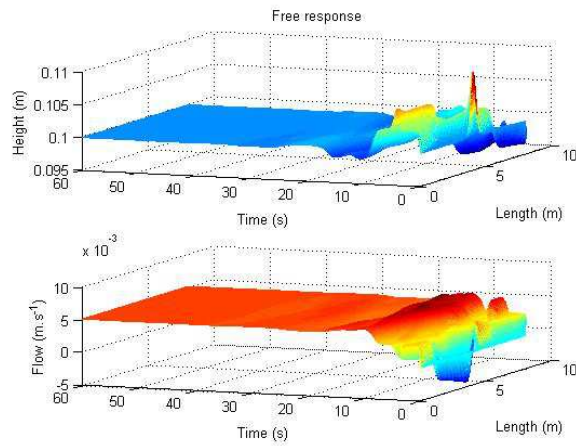


(a) Simulation scénario 1

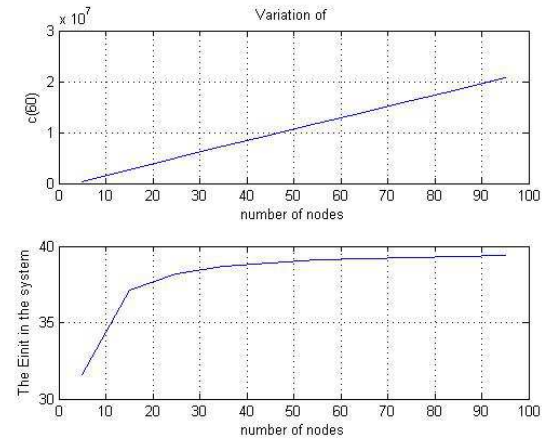


(b) Évaluation de la relation (6.22).

FIGURE 6.3 – Résultat de non commandabilité uniforme.



(a) Simulation scénario 2



(b) Évaluation de la constante d'observation dans le cas de l'observabilité

FIGURE 6.4 – Résultat de non observabilité uniforme.

6.3.2 Opérateurs utilisant l'approche Hamiltonienne

On considère le système défini en (6.8) et définissons les opérateurs de commande \mathbf{B} et d'observation C comme suit

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}z(t) = W \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\partial, \mathcal{L}z} \\ \mathbf{e}_{\partial, \mathcal{L}z} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

et

$$y(t) = Cz(t) = \tilde{W} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\partial, \mathcal{L}z} \\ \mathbf{e}_{\partial, \mathcal{L}z} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

avec W et \tilde{W} des matrices à définir qui permettront de choisir les types de commande et d'observation aux frontières. Les variables de ports $\mathbf{f}_{\partial, \mathcal{L}z}$ et $\mathbf{e}_{\partial, \mathcal{L}z}$ sont généralement choisies de manière à être des variables duales et leur produit est équivalent à une puissance (on parle du produit d'un flux et d'un effort). Dans les équations de Saint-Venant, ces variables correspondent au débit et à la pression hydrodynamique (dérivées variationnelles définies en (4.81)-(4.82)). Le vecteur des variables de ports à la frontière est alors donné par

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\partial, \mathcal{L}z} \\ \mathbf{e}_{\partial, \mathcal{L}z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta Q(0) \\ \delta Q(L) \\ \delta P_d(0) \\ \delta P_d(L) \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

où on suppose une linéarisation autour d'un profil (h_e, u_e) . δQ et δP_d correspondent aux variations en débit et pression hydrodynamique autour des profils d'équilibre correspondant.

Il est à noter que le choix d'une structure de commande impose un choix unique des matrices W et \tilde{W} . Par exemple la configuration

$$\mathbf{u}_1 = \delta Q_1 = \delta Q(0), \quad (6.30)$$

$$\mathbf{u}_2 = \delta P_{dN} = \delta P_d(L), \quad (6.31)$$

$$y_1 = \delta P_{d1} = \delta P_d(0), \quad (6.32)$$

$$y_2 = -\delta Q_N = \delta Q(L), \quad (6.33)$$

peut être écrite sous la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ \tilde{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Q_1 \\ \delta Q_N \\ \delta P_{d1} \\ \delta P_{dN} \end{bmatrix}, \quad (6.34)$$

avec

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.35)$$

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.36)$$

Il est aisé de vérifier qu'en prenant S et V telles que

$$S = \frac{1}{2} (W_1 + W_2), \quad (6.37)$$

$$V = (W_1 + W_2)^{-1} (W_1 - W_2), \quad (6.38)$$

où W_1 et W_2 sont des matrices 2×2 telles que $W = [W_1 \ W_2]$, les conditions du théorème 4.21 sont vérifiées et le système commandé ainsi défini est un système conservatif. En effet, on a

$$W \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} W^T = 0.$$

En particulier, le semi-groupe Φ généré par \mathcal{JL} est un semi-groupe unitaire, et la variation d'énergie dans le système est donnée par

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{u}^T y = \delta Q \cdot \delta P_d|_{x=0} - \delta Q \cdot \delta P_d|_{x=L} = 0.$$

Nous montrons dans la suite que pour un choix particulier des variables de commande, le système est passif. Pour cela, nous utilisons les variables de scattering données par

$$\begin{bmatrix} v_s \\ w_s \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ y \end{bmatrix}, \quad (6.39)$$

où v_s est l'onde incidente et w_s est l'onde réfléchie, la variation d'énergie, dans ce cas, peut être donnée par

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{u}^T y = \frac{v_s^2}{2} - \frac{w_s^2}{2}, \quad (6.40)$$

et cette variation est négative lorsque l'onde incidente est nulle ($v_s = 0$, la puissance incidente est nulle). En effet, on a

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{w_s^2}{2} < 0, \quad (6.41)$$

et le système ainsi défini est passif. On peut vérifier que le semi-groupe Φ généré par \mathcal{JL} dans ce cas est un semi-groupe de contraction. On constate, en effet qu'on a

$$\begin{aligned} E(t) = \|z(t)\|_{\mathcal{L}}^2 &< \|z(0)\|_{\mathcal{L}}^2, \quad \forall z(0) \\ \Leftrightarrow \|\Phi(t)z(0)\|_{\mathcal{L}}^2 &< \|z(0)\|_{\mathcal{L}}^2, \quad \forall z(0) \\ \Rightarrow \|\Phi(t)\|_{\mathcal{L}}^2 &< 1. \end{aligned} \quad (6.42)$$

L'utilisation du théorème 4.22 et du résultat (6.42) permettent de conclure qu'il existe un temps $T > 0$ pour lequel le système Hamiltonien à ports (6.8) est commandable¹.

Il est à noter que dans ce cas, l'énergie fournie au système (si on s'intéresse à la commande, ou mesurée si on s'intéresse à l'observation) est directement donnée par l'intégrale dans le temps de la puissance réfléchie $-\frac{w_s^2}{2}$.

1. Le temps T nécessaire pour réaliser la commande devra être au moins plus grand que le temps de propagation d'une onde traversant le canal, soit $T > \frac{L}{\sqrt{gh}}$, où g est l'accélération gravitationnelle, L la longueur du canal et h la hauteur.

Nous définissons dans la suite le modèle de Boltzmann sur réseau avec la commande correspondant dans ce cas. La discrétisation du système conduit à un système de la forme

$$z_{\delta x}(k+1) = F_{\delta x} z_{\delta x}(k) + \mathbf{B}_{\delta x} \mathbf{u}(k) \quad (6.43)$$

$$z_{\delta x}(0) = z_{\delta x,0}, \quad (6.44)$$

$$\mathbf{u}(k) = W \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\partial, \mathcal{L}z} \\ \mathbf{e}_{\partial, \mathcal{L}z} \end{bmatrix}. \quad (6.45)$$

avec W défini en (6.35).

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 6.8 *Considérons le système (6.43), avec la commande \mathbf{u} définie en (6.45). L'énergie fournie au système (énergie de commande) notée $\Gamma(T)$ et donnée par $\int_0^T \frac{w_s^2(t)}{2} dt$ peut être approchée par*

$$\Gamma_{\delta x}(T) = \sum_{j=0}^m |\mathbf{u}(j)|^2 \delta t \quad (6.46)$$

et cette approximation converge vers $\int_0^T |\mathbf{u}(t)|^2 dt$, avec $T = m \cdot \delta t$.

La preuve de ce lemme est assez intuitive et facile à vérifier.

En utilisant la dualité entre les notions de commandabilité et d'observabilité un lemme similaire peut être obtenu sur la convergence de l'énergie mesurée aux frontières.

Ce lemme va permettre de conclure sur la propriété de commandabilité uniforme de la famille de systèmes $(\mathcal{S}_{\delta x})$.

Proposition 6.9 *Considérons la famille de systèmes (6.43) avec la commande \mathbf{u} définie en (6.45). Il existe un temps $T > 0$ pour lequel nous avons*

$$\left[\frac{E_{\delta x}(0)}{\Gamma_{\delta x}(T)} \right] \rightarrow \alpha_1, \quad \text{lorsque } \delta x \rightarrow 0, \quad (6.47)$$

avec α_1 la constante d'observation.

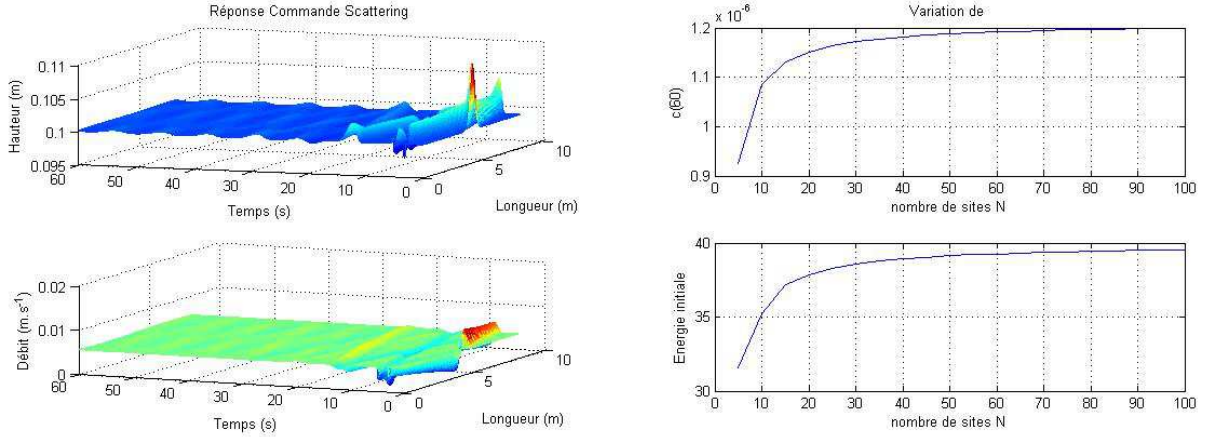
Cette proposition est la conséquence immédiate des lemmes 6.8 et 6.2 (sur la convergence de l'énergie initiale $E_{\delta x}(0)$). Elle permet de conclure que la famille de systèmes $(\mathcal{S}_{\delta x})$ définie en (6.43) munie de la commande (6.45) est commandable uniformément.

Un résultat similaire peut être obtenu pour l'observabilité uniforme.

Dans la suite, nous évaluons, au travers d'un exemple numérique, la commandabilité uniforme avec la méthode de Boltzmann sur réseau (6.43) munie de la commande (6.45).

Remarque 6.10 *La prise en compte de la commande (6.45) est faite de manière à imposer une puissance incidente nulle. Cela revient à imposer une valeur algébrique aux variations de débit (δQ) et de pression hydrodynamique (δP_d) identiques. Ceci est fait en utilisant les variables \bar{h} et \bar{u} telles que*

$$\begin{aligned} B\bar{h}\bar{u} - \rho(g\bar{h} + \frac{\bar{u}^2}{2}) &= 0, & (\text{on suppose } \bar{h} \text{ fixé}) \\ \Leftrightarrow \rho\bar{u}^2/2 - B\bar{h}\bar{u} + \rho g\bar{h} &= 0. \end{aligned} \quad (6.48)$$



(a) Simulation scénario avec variables de scattering (b) Évaluation de la constante d'observation avec une commande en variables de scattering.

FIGURE 6.5 – Résultat de la commandabilité uniforme avec une commande en variables de scattering

Le discriminant de (6.48) est donné par

$$\Delta = (B\bar{h})^2 - 2\rho^2 g\bar{h}. \quad (6.49)$$

Pour la commande, il est nécessaire que les variables \bar{u} soient réelles. Cette condition est satisfaite pour tout $\bar{h} \leq 0$. Les solutions de (6.48) pour \bar{h} donné sont alors données par

$$\bar{u}_{1,2} = \frac{B\bar{h}}{2\rho} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\rho^2 g}{B^2 \bar{h}}} \right). \quad (6.50)$$

En utilisant ces variables, on définit une commande dont la puissance incidente est nulle ($v_s^2/2 = 0$) et la puissance réfléchiée $w_s^2/2$ est la puissance localisée aux frontières du système.

Pour la simulation, le système est initialisé avec une bosse au milieu du bief (figure 6.2). Une onde regressive de hauteur est ensuite créée en amont du bief par fermeture progressive de la vanne entre les instants 2s et 3s, puis la vanne est remise à son état initial. La simulation est faite sur 60s.

Les résultats de simulation sont présentés sur la figure Fig. 6.5. Ces résultats vont dans le sens de la proposition 6.9 et permettent de conclure que la famille de systèmes $(S_{\delta x})$ munie de la commande (6.45) est uniformément commandable.

Le précédent résultat conduit à une conclusion différente du résultat de la proposition 6.6 que nous avons présenté plus haut. Cette différence provient du choix des conditions aux bords.

Il est à noter que les résultats obtenus avec un choix classique des conditions de bord (dans le cas des systèmes discrets, cela se ramène généralement aux sites frontières, proposition 6.6) sont des résultats se rapprochant des résultats existants dans la littérature avec des méthodes de discrétisation différentes sur d'autres systèmes hyperboliques (différences finies appliquées aux équations des ondes par exemple, voir Ervedoza and Zuazua (2012), Zuazua (2002, 2005b) et les références qui y

sont). Ce résultat va également dans le sens des résultats dans la littérature vu dans les chapitres précédents (notamment dans le chapitre 4).

En définissant la commandabilité et/ou l'observabilité à partir des systèmes représentés sous forme Hamiltonienne à ports, nous avons pu définir des concepts plus globaux et le résultat de commandabilité uniforme est atteint en utilisant une commande basée sur les variables de scattering, ce qui n'est pas le cas lorsqu'on utilise une discrétisation classique (notamment en utilisant les opérateurs de commande et/ou d'observation habituels que sont le débit et ou la hauteur).

Le résultat de la proposition 6.9 se justifie principalement par une interprétation énergétique des profils à commander. Il ne s'agit plus ici de commander des profils de hauteurs et/ou de débits, mais plutôt de l'énergie dans le système et de sa variation aux frontières.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité de la commandabilité et de l'observabilité uniformes des écoulements en eaux peu profondes modélisés par la méthode de Boltzmann sur réseau. Nous avons présenté la notion de commandabilité uniforme et introduit les outils de sa caractérisation. En utilisant la représentation du système sous forme Hamiltonienne introduite au chapitre 4, nous avons présenté des résultats permettant de conclure sur la commandabilité uniforme des familles de systèmes d'ordre réduit défini par les modèles de Boltzmann sur réseau.

Les résultats présentés dans ce chapitre reposent sur la définition de deux types de commande. Ces commandes sont définies en utilisant deux approches distinctes, la première basée sur la modélisation introduite dans le chapitre 2, qui est basée sur une commande avec les variables classiques utilisées pour la commande des canaux d'irrigation (débit et/ou hauteur). La deuxième est basée sur l'approche Hamiltonienne à ports avec comme variables de commande les puissances fournies aux deux extrémités. Nous avons montré que les propriétés de commandabilité et d'observabilité uniformes se perdaient dans le cas de la première approche, alors que dans la deuxième approche les propriétés se conservaient.

Conclusion générale

Principales contributions de la thèse

Dans cette thèse, nous avons présenté des résultats sur la modélisation et l'analyse des systèmes non linéaires à paramètres distribués par la méthode de Boltzmann sur réseau, avec comme application les écoulements en eaux peu profondes. Cette thèse est divisée en deux parties : la première traite de la modélisation des écoulements en eaux peu profondes et la deuxième traite de leur analyse.

Dans la première partie, nous avons présenté une modélisation de ces écoulements en utilisant la méthode de Boltzmann sur réseau. Cette représentation présente les avantages suivants :

- une modélisation sous forme d'état tenant compte de la dynamique du système, mais aussi de la commande (interne ou externe) et/ou de l'observation du système. Elle permet, en outre, une étude de la commandabilité et/ou de l'observabilité des modèles LB en utilisant les outils classiques de l'Automatique (grammiens, matrice de Kalman, etc.) ;
- la représentation dans un formalisme semi-groupe du système. Cette représentation facilite l'analyse (étude de la commandabilité et/ou de l'observabilité) lorsque la dimension du modèle LB augmente et qu'une étude analytique s'avère délicate.

Une comparaison des modèles LB avec les modèles obtenus par les méthodes classiques de discrétisation montre que les modèles LB sont plus précis pour un temps de calcul comparable. Une présentation de l'interconnexion des modèles $1D$ et $2D$ a également été faite. Nous avons montré qu'en utilisant des bords adaptés, l'interconnexion de ces modèles se faisait aussi bien qu'une interconnexion entre deux modèles $1D$. Cette interconnexion peut notamment servir de support dans la définition de réseaux complexes.

Dans cette partie, nous avons également présenté la modélisation des phénomènes de sédimentation dans le but de faciliter la prise en compte du phénomène et sa résolution numérique. Nous avons ainsi proposé une modélisation $1D$ de ces phénomènes en utilisant une approche basée sur la définition de lois pour chaque couche d'écoulement. Cette approche multi-couche permet de décomposer le domaine en plusieurs sous-domaines (2 à 3 dans le cas des écoulements en eaux peu profondes), chacune étant régie par une loi. Le modèle ainsi obtenu, que nous avons appelé $2 - swe 1D$ a été validé numériquement à travers quelques scénarios bien connu de la littérature : étude de l'état stationnaire, étude du transport de sédiments lors de ruptures de barrages. La validation numérique a été effectuée en utilisant un modèle récemment développé basé sur un schéma couplé de la méthode des volumes finis. Nous avons également montré que le modèle $2 - swe 1D$ défini nécessitait un temps de calcul

plus petit que le modèle défini avec la méthode des volumes finis utilisée.

Dans la deuxième partie, nous avons présenté une étude sur l'analyse des propriétés de commandabilité et d'observabilité des modèles de Boltzmann sur réseau obtenus dans la première partie. La première analyse, basée sur l'utilisation des critères algébriques de Kalman pour la commandabilité et l'observabilité, a permis de dresser un premier constat : les modèles LB définis ne conservaient pas leurs propriétés de commandabilité et/ou d'observabilité. Une comparaison a notamment permis de montrer que les modèles LB étaient autant commandables que ceux obtenus avec les méthodes «classiques» de discrétisation.

Ce premier résultat a nécessité une évaluation des propriétés de commandabilité et d'observabilité en utilisant des grammien. Cette évaluation a conduit à la définition de nouveaux algorithmes de calcul de ces grammien. Nous nous sommes intéressés à des algorithmes efficaces permettant de déterminer les grammien associés aux modèles LB qui ont des matrices de grande dimension et sont creuses. L'utilisation des méthodes traditionnelles de résolution des équations de Lyapunov conduit en effet à un résidu non négligeable (lorsque le nombre de points de discrétisation augmente) et ne permet pas de conclure, de manière sereine, sur la commandabilité (ou l'observabilité) ou non des modèles LB obtenus. Nous avons montré que les algorithmes de type point fixe utilisés dans cette étude conduisent à des résidus de l'ordre la précision machine, donc à des solutions fiables des équations de Lyapunov pour les grammien.

Cette seconde partie se termine par l'étude de la commandabilité uniforme des modèles LBM. Le modèle de dimension infinie, sous certaines hypothèses, est exactement commandable depuis la frontière. Les modèles LB perdent leur commandabilité pour une définition des commandes classiques des canaux d'irrigation (hauteur/débit, pression hydrodynamique/débit) lorsque le nombre de sites de discrétisation augmente. Mais, en utilisant comme commandes les variables d'ondes, la famille de modèles LB est uniformément commandable, c'est à dire que la suite de commandes discrètes définie est uniformément bornée et converge vers la commande continue définie pour la commande du système Hamiltonien à ports.

Perspectives

De nombreuses pistes et suites peuvent être explorées dans le but d'améliorer ce travail, autant d'un point de vue modélisation que d'un point de vue analyse des propriétés de commandabilité et/ou d'observabilité.

Nous avons présenté l'interconnection des modèles LB $1D$ et $2D$ dans les écoulements en eaux peu profondes. On pourrait s'intéresser dans la suite à la détermination de la nécessité de passer d'une modélisation $1D$ vers une modélisation $2D$ ou vice versa. Cette étude pourrait notamment être menée dans des situations où les champs de vitesses, sur la largeur, ne sont pas uniformes ou présentent de très fortes variations. Cela peut, par exemple, être le cas dans la modélisation des écoulements en eaux peu profondes dans un virage. Il pourrait s'agir de déterminer à partir de quel rayon de courbure une modélisation en $1D$ n'est plus adaptée et donc une modélisation en $2D$ devient nécessaire ou inversement.

Pour la modélisation des phénomènes de sédimentation, nous avons validé numériquement le modèle $2-swe\ 1D$ et avons montré que ce modèle $2-swe\ 1D$ présentait

des similitudes avec les modèles obtenus par un schéma couplé basé sur la méthode des volumes finis. Il est à noter que le modèle défini dépend de plusieurs paramètres (temps de relaxation de l'eau pure, temps de relaxation du mélange eau-sédiments, paramètre A_g du modèle empirique de Grass permettant l'évaluation du débit de sédiments,...) qui peuvent être identifiés dans le but de se rapprocher le plus des profils désirés, par exemple de manière expérimentale sur le micro-canal de Valence. Une suite à cette validation serait une validation expérimentale sur le micro-canal de Valence. Cette validation pourrait se faire sur les différents scénarios présentés dans ce mémoire, mais aussi en considérant plusieurs types de granulat pour une identification et/ou une optimisation des différents paramètres du modèle.

Concernant l'analyse de la commandabilité et/ou de l'observabilité des modèles LB obtenus dans nos travaux, nous avons montré que ces derniers ne conservaient pas leurs propriétés de commandabilité et/ou d'observabilité lorsque l'ordre de réduction du modèle augmentait (dans le cas des commandes classiques). On pourrait s'intéresser dans la suite à la définition des espaces atteignables (ensemble des profils hauteur/débit qu'on peut atteindre) pour chaque ordre de réduction. Il ne s'agirait plus de chercher la commandabilité (respectivement l'observabilité) des modèles LB, mais plutôt de définir l'ensemble des profils atteignables (respectivement observables) qui peut être défini à partir d'un ordre de réduction (du pas spatial, ou du nombre de sites de discrétisation).

Une autre perspective qui pourrait faire suite à ce travail serait l'étude des propriétés de commandabilité et/ou d'observabilité de systèmes complexes ou de systèmes interconnectés (plusieurs biefs, jonction Y, ouvrages hydrauliques, etc).

Annexe A

Annexes

A.1 Le micro-canal

Nous présentons dans la suite le dispositif expérimental donc les paramètres sont utilisés dans les simulations effectuées dans le cadre de ce mémoire. Le texte original peut être consulté dans [Hamroun \(2009\)](#). Le micro-canal est un procédé pilote utilisé dans le cadre d'activités de recherche, d'enseignement et de valorisation industrielle. Les paramètres du micro-canal sont résumés sur Tab. [A.1](#). On y lit notamment les valeurs des paramètres géométriques du canal, mais également celles des ouvrages hydrauliques.

Le microcanal est un procédé largement instrumenté qui permet de reproduire le comportement de canaux d'irrigation ou de rivières. Il peut être utilisé pour la validation de nombreux types de développements théoriques menés dans les laboratoires que ce soit sur la modélisation, l'identification, l'observation et la commande. Il a servi de supports à de nombreux travaux de doctorat et a été fréquemment utilisé par des chercheurs venant de diverses horizons pour valider leur travaux. Il reste une plateforme technologique accessible à la communauté scientifique et permet d'élargir la connaissance du système via des objectifs de recherche différents. Le canal est fait en quatre tronçons de polycarbonate. À la partie canal, vient s'ajouter un réservoir amont qui fait office de source et dont le niveau est régulé via un automate, un réservoir aval et un réservoir intermédiaire qui sert de cuve de stockage (voir figure Fig. [A.1](#)).

Paramètres du canal	Valeur
Longueur (L)	7 mètres
Largeur (B)	0.1 mètre
Pente (I)	1.6×10^{-3}
Coefficient de Maning-Strickler (n_s)	0.01
Coefficient de la vanne N°1	0.66
Coefficient de la vanne N°2	0.66
Coefficient de la vanne N°3	0.73
Coefficient du déversoir	0.66
Hauteur du déversoir	0.05 mètre

TABLE A.1 – Paramètres du micro-canal expérimental

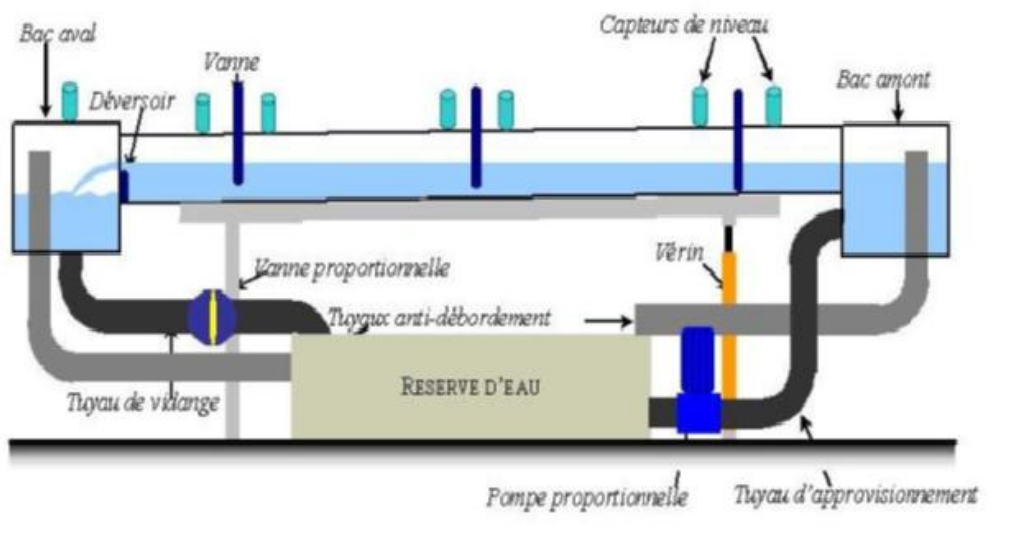


FIGURE A.1 – Schéma longitudinal du micro-canal

Toute la structure est supportée par une poutre métallique. La circulation d'eau entre les réservoirs aval, intermédiaire et amont se fait dans des tuyaux fermés. La partie canal peut être inclinée à l'aide d'un vérin. Les capteurs de niveaux (voir figure Fig. A.2) sont des capteurs à ultrasons qui renvoient une tension de 0 – 10Volts correspondant à une distance entre le capteur et la surface de 10 à 60cm. Les vannes sont actionnées par des moteurs à courant continu asservis qui, à la mise sous tension, vont chercher leurs butées et ensuite ouvrent la vannes de manière linéaire (de 0 à 20cm) en fonction de leurs tension d'entrée (0 – 10Volts). La vanne et la pompe proportionnelles sont destinées à assurer un niveau constant respectivement à l'aval et à l'amont du canal. Elles sont gérées par un automate *Crouzet* de type *Millenium II*. Via une carte *dSPACE*, toutes les données issues des capteurs sont récupérées sur un ordinateur an d'être analysées et par le même dispositif, les actionneurs du micro-canal sont pilotés.

A.2 Le développement de Chapman-Enskog

Dans cette deuxième section, nous allons présenter le calcul prouvant la convergence des modèles LB vers les équations d'écoulements en eaux peu profondes représentés par les équations de Saint-Venant.

Nous considérons les équations LB représentées par les équations d'évolution

$$f_i(r + v_i \delta t, t + \delta t) = f_i(r, t) + \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i) \quad (\text{A.1})$$

où r et t représentent respectivement les dimensions spatiale et temporelle, f_i représente le vecteur de toutes les distributions de densité entrant (f_i^{in} de la phase de propagation), v_i est la vitesse du réseau dans la direction i et t est le pas de



FIGURE A.2 – Photo du micro-canal

discrétisation spatiale. On définit les moments d'ordre 0, 1, 2 et 3 en v_i par

$$\sum_i f_i^{eq} = \sum_i f_i = A, \quad (\text{A.2})$$

$$\sum_i v_i f_i^{eq} = \sum_i v_i f_i = B, \quad (\text{A.3})$$

$$\sum_i v_i^2 f_i^{eq} = \sum_i v_i^2 f_i = C, \quad (\text{A.4})$$

$$\sum_i v_i^3 f_i^{eq} = \sum_i v_i^3 f_i = D. \quad (\text{A.5})$$

Le développement de Chapman-Enskog consiste, en utilisant les équations (A.1), à :

- faire un développement de Taylor jusqu'à l'ordre 2 des équations (A.1)

$$\delta t \partial_t f_i + v_i \delta t \partial_x f_i + \frac{1}{2} \delta t^2 \partial_t^2 f_i + \frac{1}{2} v_i \delta t^2 \partial_x^2 f_i + v_i \delta t^2 \partial_x \partial_t f_i = \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i); \quad (\text{A.6})$$

- faire un développement, via un paramètre formel ϵ (interprété comme le nombre de Knudsen) des distributions

$$f_i = f_i^{eq} + \epsilon f_i^{(1)} + \epsilon^2 f_i^{(2)} + \dots; \quad (\text{A.7})$$

- faire une analyse multi-échelle en posant

$$\partial_t = \epsilon \partial_{t1} + \epsilon^2 \partial_{t2}, \quad (\text{A.8})$$

$$\partial_x = \epsilon \partial_{x1}. \quad (\text{A.9})$$

- calculer les moments d'ordre 0 et 1 par rapport à v_i de (A.1). Il s'agit ici de multiplier par $(v_i)^k$ ($k = 0, 1$), et faire une somme suivant i ($i = 0, 1, 2$ en une

dimension par exemple). En notant que le membre de droite est éliminé pour chaque moment calculé, on peut écrire à l'échelle convective (en ϵ)

$$\partial_{t1}A + \partial_{x1}B = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\partial_{t1}B + \partial_{x1}C^{eq} = 0 \quad (\text{A.11})$$

et à l'échelle dissipative (en ϵ^2)

$$\partial_{t2}A + \frac{1}{2}\delta t \partial_{t1}^2 A + \frac{1}{2}\delta t \partial_{x1}C^{eq} + \delta t \partial_{x1}^2 B = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\partial_{t2}B + \partial_{x1}C^{(1)} + \frac{1}{2}\delta t \partial_{t1}^2 B + \frac{1}{2}\partial_{x1}D^{eq} + \delta t \partial_{x1} \partial_{t1}C^{eq} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Après quelques calculs, on aboutit à

$$\partial_t A + \partial_x B = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\partial_t B + \partial_x C^{eq} + \partial_x \left(\epsilon C^{(1)} + \frac{\delta t}{2} (\epsilon \partial_{t1} C^{eq} + \partial_x D^{eq}) \right) = 0 \quad (\text{A.15})$$

où

$$C^{(1)} = \sum_i v_i f_i^{(1)} \quad (\text{A.16})$$

$$D^{eq} = v^2 B \quad (\text{A.17})$$

Dans le cas des écoulements en eaux peu profondes, les différents moments A , B , et C correspondent à

$$A = h; \quad (\text{A.18})$$

$$B = hu \quad (\text{A.19})$$

$$C = \frac{1}{2}gh^2 + hu^2 \quad (\text{A.20})$$

Les équations (A.14)-(A.15) sont alors données par

$$\partial_t h + \partial_x (hu) = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\partial_t (hu) + \partial_x \left(\frac{1}{2}gh^2 + hu^2 \right) + \partial_x \left(\epsilon C^{(1)} + \frac{\delta t}{2} (\epsilon \partial_{t1} C^{eq} + \partial_x D^{eq}) \right) = 0 \quad (\text{A.22})$$

où l'équation (A.21) correspond à l'équation de continuité des équations de Saint-Venant, alors que l'équation (A.22) ne correspond pas encore à l'équation de conservation de mouvement à cause, notamment, du terme inconnu $C^{(1)}$. La détermination de $C^{(1)}$ nécessite celle des distributions $f_i^{(1)}$. Ces dernières peuvent être obtenues en remplaçant f_i par son développement formel en ϵ dans (A.6) et en utilisant l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$, soit

$$f_i^{(1)} = \tau \delta t (\partial_{t1} f_i^{eq} + v_i \partial_{x1} f_i^{eq}). \quad (\text{A.23})$$

Le calcul de la dérivée temporelle $\partial_{t1} f_i^{eq}$ est fait comme suit :

$$\partial_{t1} f_i^{eq} = \partial_h f_i^{eq} \partial_{t1} h + \partial_{hu} f_i^{eq} \partial_{t1} (hu), \quad (\text{A.24})$$

où les f_i^{eq} sont données par

$$f_0^{eq} = h - \frac{gh^2}{2v^2} - \frac{hu^2}{v^2}, \quad (\text{A.25})$$

$$f_1^{eq} = \frac{gh^2}{4v^2} + \frac{hu}{2v} + \frac{hu^2}{2v^2}, \quad (\text{A.26})$$

$$f_2^{eq} = \frac{gh^2}{4v^2} - \frac{hu}{2v} + \frac{hu^2}{2v^2}. \quad (\text{A.27})$$

On peut alors écrire

$$\epsilon \partial_{t1} f_i^{eq} = - \left(\partial_h f_i^{eq} \partial_x (hu) + \partial_{hu} f_i^{eq} \partial_x \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) \right), \quad (\text{A.28})$$

$$= - \left[(\partial_h f_i^{eq} + 2u \partial_{hu} f_i^{eq}) \partial_x (hu) + (gh - u^2) \partial_{hu} f_i^{eq} \partial_x h \right], \quad (\text{A.29})$$

qui permet d'écrire

$$\epsilon f_i^{(1)} = -\tau \delta t (\epsilon \partial_{t1} f_i^{eq} + v_i \epsilon \partial_{x1} f_i^{eq}), \quad (\text{A.30})$$

$$= -\tau \delta t \left[-(\partial_h f_i^{eq} + 2u \partial_{hu} f_i^{eq}) \partial_x (hu) + (gh - u^2) \partial_{hu} f_i^{eq} \partial_x h + v_i \partial_x f_i^{eq} \right] \quad (\text{A.31})$$

et le calcul pour chaque i conduit à

$$\epsilon f_0^{(1)} = \tau \delta t \left[\left(1 - \frac{gh}{v^2} + 3 \frac{u^2}{v^2} \right) \partial_x (hu) + 2 \left(\frac{u^2 - gh}{v^2} \right) u \partial_x h \right], \quad (\text{A.32})$$

$$\epsilon f_1^{(1)} = -\frac{1}{2} \epsilon f_0^{(1)}, \quad (\text{A.33})$$

$$\epsilon f_2^{(1)} = -\frac{1}{2} \epsilon f_0^{(1)}. \quad (\text{A.34})$$

On peut donc déterminer la contribution dissipative (A.22)

$$J_{lbm} = \partial_x \left(\epsilon C^{(1)} + \frac{\delta t}{2} (\epsilon \partial_{t1} C^{eq} + \partial_x D^{eq}) \right), \quad (\text{A.35})$$

qui peut être calculé complètement en utilisant les densités $f_i^{(1)}$. On obtient donc

$$J_{lbm} = \delta t \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \partial_x \left[(v^2 - gh - 3u^2) \partial_x (hu) + 2(u^2 - gh) u \partial_x h \right]. \quad (\text{A.36})$$

En utilisant ce terme de viscosité, on peut écrire les équations LB équivalentes aux équations de Saint-Venant à un terme de viscosité près

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x (hu) &= 0, \\ \partial_t (hu) + \partial_x \left(\frac{gh^2}{2} + hu^2 \right) &= J_{lbm}. \end{aligned}$$

Il est à noter que plus le terme de viscosité J_{lbm} est petit, plus les équations LB approchent les équations non visqueuses de Saint-Venant. En particulier, on note que lorsque $h \rightarrow 0$, et $u \rightarrow 0$, le terme de viscosité converge vers le terme de viscosité standard

$$J_{lbm} = v^2 \delta t \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \partial_x^2 (hu).$$

En fin, on note qu'un raisonnement similaire sur le transport des sédiments conduit aux mêmes conclusions.

Bibliographie

- L. Afifi, A. El Jai, and E. Zerrik. *Systèmes dynamiques, Analyse régionale des systèmes linéaires distribués*. Presses Universitaires de perpignan, 2008.
- S. Alinhac. Mécanisme d’explosion des solutions classiques de systèmes hyperboliques unidimensionnels. *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)*, pages 1–10, 1994-1995. exp n° 6.
- S. Alinhac. Temps de vie précisé et explosion géométrique pour des systèmes hyperboliques quasilinéaires en dimension un d’espace. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze*, 4^e série(tome 22, n° 3) :493–515, 1995.
- N. Ammor ep. El Attar. *Contrôlabilité régionale des automates cellulaires*. PhD thesis, Université Mohammed V, 2004.
- M. Amouroux, A. El Jai, and E. Zerrik. Regional observability of distributed systems. *International Journal of Systems Science*, 25(2) :301–313, 1994.
- D. Anda Ondo, L. Lefèvre, and B. Chopard. A discrete controllability of distributed parameters systems using Lattice Boltzmann Models : an application to shallow water equations. *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, pages 9206–9211, August/September 2011a.
- D. Anda Ondo, L. Lefèvre, and B. Chopard. Commandabilité d’un modèle de boltzmann sur réseau en eaux peu profondes. *Actes JD-MACS*, pages 335–340, Juin 2011b.
- D. Anda Ondo, L. Lefèvre, and B. Chopard. Contrôlabilité des écoulements en eaux peu profondes : étude comparative avec la lbm. *Actes de la 7^e Conférence Internationale Francophone d’Automatique*, pages 227–232, Juillet 2012.
- D. Anda Ondo, L. Lefèvre, and B. Chopard. Boundary port variables and uniform controllability : the shallow water example. *Proceedings of the 1st Workshop, CPDE*, 2013a. Accepted.
- D. Anda Ondo, L. Lefèvre, and B. Chopard. A two-layers shallow water lattice boltzmann model for sediment transport in free surface. *NASCA 13*, 2013b. Accepted.
- A. C. Antoulas. *Approximations of Large-Scale Dynamical Systems*. SIAM, 2005.
- E. Audusse, C. Chalons, O. Delestre, N. Goutal, M. Jodeau, J. Sainte-Marie, J. Giesselmann, and G. Sadaka. Sediment transport modelling : relaxation schemes for Saint-Venant-Exner and three layer models. *ESAIM proceedings*, 2012.

- A. Barré de Saint-Venant. Théorie du mouvement non-permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à introduction des marrés dans leur lit. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 73 :148–154, 237–240, 1871. Paris.
- G. Bastin and J. Coron. On boundary feedback stabilization of non-uniform linear 2×2 hyperbolic systems over a bounded interval. *Systems and Control Letters*, 60 :900–906, 2011.
- J.-P. Baume and J. Sau. Study of irrigation canal dynamics for control purpose. *International Workshop on the Regulation of Irrigation Canals : State of the Art of Research and Applications (RIC'97)*, pages 3–12, April 1997. Marrakech (Morocco).
- J.-P. Baume, J. Sau, and P.-O. Malaterre. Modeling of irrigation channel dynamics for controller design. *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC'98)*, October 1998.
- P. Benner and H. Fabbender. On the numerical solution of large-scale sparse discrete-time riccati equations. *Advances in Computational Mathematics*, 35, November 2011.
- P. Benner and J. Saak. A galerkin-newton-adi method for solving large-scale algebraic riccati equations, 2010.
- P. Benner, E. S. Quintana-Orti, and G. Quintana-Orti. Solving stable stein equations on distributed memory computers. *Lecture Notes in Computer Science*, Volume 1685/1999 :1120–1123, January 1999.
- P. Benner, V. Sima, and M. Slowik. Evaluation of the Linear Matrix Equation Solvers in SLICOT. *J. Num. Anal., Ind. Appl. Math.*, 2(1) :11–34, 2007.
- P. Benner, J.-R. Li, and T. Penzl. Numerical solution of large-scale lyapunov equations, riccati equations, and linear-quadratic optimal control problems. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 15 :755–777, 2008.
- S. Bennis. *Hydraulique et hydrologie*. Presses de l'Université du Québec, 2007.
- R. Benzi, S. Succi, and M. Vergassola. The lattice boltzmann equation : theory and application. *Phys. Rep.*, 222(3) :145–197, 1992.
- P. Bhatnagar, E. Gross, and M. Krook. A model for Collision Processus in Gases. I. Small Amplitude Processus in Charged and Neutral One-Component Systems. *Physical Review*, 94(3) :511–525, 1954.
- F. Boyer, F. Hubert, and J. L. Rousseau. Discrete carleman estimates for elliptic operators and uniform controllability of semi-discretized parabolic equations, November 2009.
- C. Castro and S. Micu. Boundary controllability of a linear semi-discrete 1-d wave equation derived from a mixed finite element method. *Numerische Mathematik*, pages 413–462, 2006.

- M. Castro, E. Fernández-Nieto, and A. Ferreiro. Sediment transport models in shallow water equations and numerical approach by high order finite volume methods. *Computers and Fluids*, 37 :299–316, 2008.
- J. Cervera, A. van der Schaft, and A. Baños. Interconnection of port-hamiltonian system and composition of dirac structures. *Automatica*, 43 :212–225, 2007.
- P. C. Chandrasekharan. *Robust Control of Linear Dynamical Systems Systems*. Harcourt Brace, Academic Press Inc, 1996.
- S. Chapman and G. Cooling. *The mathematical theory of non-uniform gases*. Cambridge University Press, 1939.
- S. Chen and G. D. Doolen. Lattice boltzmann method for fluid flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30 :329–364, 1998.
- S. Chen, D. Martinez, and R. Mei. On boundary conditions in lattice boltzmann methods. *Phys. Fluids*, 8(9) :2527–2536, 1996.
- S. S. Chikatamarla, S. Ansumali, and I. V. Karlin. Entropic lattice boltzmann models for hydrodynamics in three dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 97(010201), 2006.
- B. Chopard and M. Droz. *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*. Cambridge University Press, 2005.
- B. Chopard and D. Lagrava. A cellular automata model for species competition and evolution. In *Proc. of the Int. Conf. on Cellular Automata for Research and Industry ACRI'06*, Perpignan, France, 2006.
- B. Chopard, A. Masselot, and A. Dupuis. A lattice gas model for erosion and particle transport in a fluid. *LGA99 conference, Tokyo*, 129 :167–176, 2000.
- B. Chopard, R. Ouared, A. Deutsch, H. Hatzikirou, and D. Wolf-Gladrow. Lattice-gas cellular automaton models for biology : From fluids to cells. *Acta Biotheoretica*, pages 1–12, 2010. DOI 10.1007/s10441-010-9118-5.
- B. Chopard, v.T. Pham, and L. Lefèvre. An assymetric lattice boltzmann model for the 1d shallow water equation. *Com. Comput. Physics*, 2011. submitted for publication.
- M. Cirinà. Boundary controllability of nonlinear hyperbolic systems. *SIAM J. Control Optim.*, 7 :198–212, 1969.
- P. A. Clarkson and E. L. Mansfield. On a shallow water wave equation. *Nonlinearity*, 7 :975–1000, 1994.
- A. J. Clemmens, E. Bautista, B. T. Wahlin, and R. J. Strand. Simulation of automatic canal control systems. *Journal of irrigation and drainage engineering*, July/August 2005.
- S. Cordier, M. Le, and T. Morales de Luna. Bedload transport in shallow water models : Why splitting (may) fail, how hyperbolicity (can) help. *Advances in water ressources*, 34 :980–989, 2011.

- J. Coron. On the null asymptotic stabilization of the two-dimensional incompressible euler equations in a simply connected domain. *SIAM journal on Control and Optimization*, 37(6) :1874–1896, 1999.
- J. Coron. Local controllability of a 1-d tank containing a fluid modeled by the shallow water equations. *ESAIM : Control Opt. Calc. Var.*, 8 :513–554, 2002.
- J. Coron, B. d’Andréa-Novel, and G. Bastin. A strict lyapunov function for boundary control of hyperbolic systems of conservation laws. *IEEE Transactions on Automatic control*, 52(1) :2–11, 2007.
- R. F. Curtain and H. J. Zwart. *An Introduction to Infinte-Dimensional Linear Systems Theory*. Springer-Verlag, 1995.
- P. J. Dellar. Nonhydrodynamic modes and a priori construction of shallow water lattice boltzmann equations. *Physical review E*, 65, 2002.
- D. d’Humières, I. Ginzburg, M. Krafczyk, P. Lallemand, and L.-S. Luo. Multiple-relaxation-time lattice boltzmann models in three dimensions. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 360 :437–451, 2002.
- A. Diagne, G. Bastin, and J. Coron. Lyapunov exponential stability of 1-d linear hyperbolic systems of balance laws. *Automatica*, 48 :109–114, 2012.
- B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, and B. Roulet. *Physique Statistique*. Hermann, Paris, 1989.
- W. S. Don and D. Gottlieb. The chebyshev-legendre method : implementing legendre methods on chebyshev points. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(6) :1519–1534, December 1994.
- J.-F. Dulhoste. *Contribution à la commande non linéaire de systèmes d’irrigation*. PhD thesis, Laboratoire d’Automatique de Grenoble, novembre 2001.
- A. Dupuis and B. Chopard. Lattice gas modeling of scour formation under submarine pipelines. *Journal of Mathematical Physics*, 178(1) :161–174, 2002a.
- A. Dupuis and B. Chopard. Lattice gas simulation of sediments flow under submarine pipelines with spoilers. *The 4th international conference on HydroInformatics, Cedar Rapids, USA*, 2002b.
- J. G. M. Eggels. Direct and large-eddy simulation of turbulent fluid flow using lattice-boltzmann scheme. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 17 :307–323, 1996.
- J. G. M. Eggels and J. A. Somers. Numerical simulation of free convective flow using the lattice-boltzmann scheme. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 16 :357–364, 1995.
- A. El Jai. *Éléments de contrôlabilité*. Collection Études Presses Universitaires de Perpignan, 2006.
- A. El Jai and M. Amouroux. *Automatique des systèmes distribués*. Hermes, 1990.

- A. El Jai and K. Kassara. Spreadable distributed systms. *Mathl. Comput. Modelling*, 20(1) :47–64, 1994.
- A. El Jai and K. Kassara. Spreadability of transport systems. *International Journal of Systems Science*, 27(7) :681–688, 1996.
- A. El Jai, M. Simon, and E. Zerrik. Regional observability and sensor structures. *Sensors and Actuators A*, 39 :95–102, 1993.
- A. El Jai, A. Pritchard, M. Simon, and E. Zerrik. Regional controllability of distributed systems. *International Journal of Control*, 62(6) :1351–1365, 1995.
- A. El Jai, K. Kassara, and O. Cabrera. Spay control. *Int. J. Control*, 68(4) :709–730, 1997.
- A. El Jai, E. Zerrik, and K. Ztot. *Systèmes dynamiques, Analyse et contrôle des systèmes localisés*. Presses Universitaires de perpignan, 2008.
- S. El Yacoubi. A mathematical method for control problems on cellular automata models. *International Journal of Science*, 39(5) :529–538, May 2008.
- S. El Yacoubi and A. El Jai. Cellular automata and spreadability. *International journal of Mathematical and computer modelling*, 36(4) :1059–1074, 2002.
- S. El Yacoubi, A. El Jai, and N. Ammor. Regional controllability with cellular automata models. *Proceedings of the 5th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry*, pages 357–368, 2002.
- K. Engel and R. Nagel. *One-Parameter Semigroup for Linear Evolution Equations*. Springer, 2000.
- S. Ervedoza and E. Zuazua. *The Wave Equation : Control and Numerics*, 2012.
- L. Fraccarollo, H. Capart, and Y. Zech. A Godunov method for the computation of erosional shallow water transients. *Int. Journal for Numerical methods in fluids*, 41 :951–976, 2003.
- J. Frandsen. Free surface water wave 1-d lbgk predictions. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 20(6) :427–437, July 2006.
- J. Frandsen. A simple lbe run-up model. *Progress in Computational Fluid Dynamics*, 8 :222–232, 2008.
- U. Frisch, B. Hasslacher, and Y. Pomeau. Lattice gas cellular automata for the navier-stokes equations. *Phys. Rev. Letters*, 56(14) :1505–1508, April 1986.
- U. Frisch, D. d’Humières, B. Hasslacher, P. Lallemand, Y. Pomeau, and J.-P. Rivet. Lattice-gas hydrodynamics in two and three dimensions. *Complex Systems*, 1(4) : 649–707, 1987.
- D. Georges and X. Litrico. *Automatique pour la gestion des ressources en eau*. Hermes, Lavoisier, 2002.

- A. G. Gibson. A discrete Hille-Yosida-Phillips theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 39, 761-770, 1972.
- I. Ginzburg and K. Steiner. Free surface lattice-boltzmann method to model the filling of expanding cavities by bingham fluids. *Royal Society*, 2001.
- I. Ginzburg and K. Steiner. Lattice boltzmann model for free-surface flow and its application to filling process in casting. *Journal of Computational Physics*, 189 : 61-99, 2003.
- K. Glover. All optimal hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their l_∞ -error bounds. *Inter. Journal of Control*, 39 :859-870, 1984.
- W. Graf and e. M. Altinakar. *Hydraulique fluviale Écoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2000.
- A. J. Grass. Sediment transports by waves and currents, 1981. SERC London , Cent. Mar. Technol. ReportNo. : FL29.
- D. Grunau, S. Chen, and E. Kenneth. A lattice boltzmann model for multi-phase fluid flows. *Phys. Fluids A*, 5 :2557-2562, 1993.
- Q. Gu. *Solutions globales, limite de relaxation, contrôlabilité et observabilité exactes frontières pour des systèmes hyperboliques quasi-linéaires*. PhD thesis, Université Blaise Pascal, 2009.
- M. Gugat and G. Leugering. Global boundary controllability of the st venant equations between steady states. *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire*, 20 : 1-11, 2005.
- M. Gugat and G. Leugering. Global boundary controllability of the st venant system for sloped canals with friction. *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire*, 26 : 257-270, 2009.
- A. K. Gunstensen, D. H. Rothman, S. Zaleski, and G. Zanetti. Lattice boltzmann model of immiscible fluids. *Phys. Rev. A*, 43 :4320-4327, Apr 1991. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.43.4320>.
- Z. Guo, C. Zheng, and B. Shi. Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice boltzmann method. *Physical review E*, 65, 2002a.
- Z. Guo, C. Zheng, and B. Shi. Discrete lattice effects on the forcing term in lattice Boltzmann method. *Physical Review E*, 65 :046308, APRIL 2002b.
- B. Hamroun. *Approche hamiltonienne à ports pour la modélisation, la réduction et la commande des systèmes non linéaires à paramètres distribués - Application aux écoulements à surface libre*. PhD thesis, Grenoble INP, LCIS, Novembre 2009.
- J. Hardy and Y. Pomeau. Thermodynamics and hydrodynamics of a modeled fluid. *Journal of Mathematical Physics*, 13(7) :1042-1051, 1972.

- J. Hardy, Y. Pomeau, and O. de Pazzis. Time evolution of two dimensional classical lattice system. *Phys. Rev. Lett.*, 31, 1973a.
- J. Hardy, Y. Pomeau, and O. de Pazzis. Time evolution of a two-dimensional model-system. i. invariant states and time correlation functions. *Journal of Mathematical Physics*, 31 :1746–1759, 1973b.
- J. Hardy, O. de Pazzis, and Y. Pomeau. Molecular dynamics of a classical lattice has : Transport properties and time correlation functions. *Phys. Rev. A*, 13(5) : 1949–1961, 1976.
- A. Harten, P. Lax, and B. van Leer. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1) :35–61, 1983.
- T. Haynes. Stable matrices, the Cayley transform, and convergent matrices. *Internat. J. Math. & Math. sci.*, 14(1) :77–82, 1991.
- X. He and L.-S. Luo. A priori derivation of the lattice boltzmann equation. *Phys. Rev.*, E(55) :R6333–R6336, 1997a.
- X. He and L.-S. Luo. Theory of the lattice boltzmann method : From the boltzmann equation to the lattice boltzmann equation. *Phys. Rev. E*, 56 :6811–6817, Dec 1997b. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.56.6811>.
- X. He and Q. Zou. Analysis and boundary condition of the lattice boltzmann bgk model with two velocities components. *Los Alamos preprint*, LA-UR-95-2293, July 1995.
- L. H. Hencinas, S. H. White, A. M. del Rey, and G. R. Sanchez. Modelling forest fire spread using hexagonal cellular automata. *Applied mathematical modelling*, 31(6) :1213–1227, 2007.
- J. Hudson and P. K. Sweby. Formulations for numerically approximating hyperbolic systems governing sediment trasnport. *J. Scient. Comput.*, 19, 2003.
- T. Inamouro, M. Yoshino, and F. Ogino. A non-slip boundary condition for lattice boltzmann simulations. *Phys. Fluids*, 7(12) :2928–2930, 1995.
- J. A. Infante and E. Zuazua. Boundary observability for the space semi-discretizations of the 1-d wave equation. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(2) :407–438, 1999.
- B. Jacob and H. Zwart. 14th internet seminar : Infinite-dimensional linear systems theory, 2011.
- M. Junk, A. Klar, and L.-S. Luo. Asymptotic analysis of the lattice boltzmann equation. *Journal of Computational Physics*, 210(2), 2005.
- R. H. Khatibi. Classification hydraulique des systèmes d’irrigation d’alimentation. *Journal of hydraulic research*, 41(1), 2003.
- C. Korner, M. Thies, T. Hofmann, N. Thurey, and U. Rude. *J. of Statical Physics*.

- A. L. Kupershtokh. New method of incorporating the body force term into the lattice boltzmann equation. *5ème Congrès International d'Electrohydrodynamique*, 2004.
- S. Labbé and E. Trélat. Uniform controllability of semidiscrete approximations of parabolic systems. *Syst. Cont. Letters*, 55(7) :597–609, 2006.
- P. Lallemand and L.-S. Luo. Theory of the lattice boltzmann method : dispersion, dissipation, isotropy, galilean invariance, and stability. *Physical Review E*, 61(6) : 6546–6562, June 2000.
- P. Lancaster. Explicit solutions of linear matrix equations. *SIAM Review*, 12(4) :544–566, October 1970. Published by Society for Industrial and Applied Mathematics.
- J. Latt. *Hydrodynamic Limit of Lattice Boltzmann equations*. PhD thesis, University of Geneva, Switzerland, 2007. URL <http://www.unige.ch/cyberdocuments/theses2007/LattJ/meta.html>.
- J. Latt and B. Chopard. Lattice boltzmann method with regularized non-equilibrium distribution functions. *Math. Comp. Sim.*, 72 :165–168, 2006.
- J. Latt, O. Malaspinas, M. Deville, and B. Chopard. External force and boundary condition in lattice boltzmann, 2010. Submitted.
- A. Le pourhiet. *Résolution Numérique des Équations aux Dérivées Partielles (Une première approche)*. Cepadues Editions, 1988.
- T. Lee and C.-L. Lin. Pressure evolution for lattice boltzmann-equation method for two-phase flow with phase change. *Physical Review E*, 67, 2003.
- T.-T. Li and B. Rao. Exact boundary controllability of unsteady flows in a tree-like network of open canals. *Methods and Appl. of Analysis*, 11(3) :353–366, September 2004.
- J. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*. Masson, 1988.
- X. Litrico and V. Fromion. *Modeling and control of hydrosystems A frequency approach*. Spriger, january 2009.
- X. Litrico, V. Fromion, and J.-P. Baume. Experimental validation of a methodology to control irrigation canals based on saint-venant equations. *Control Engineering practice*, 13(11) :1425–1437, 2005.
- F. Liu, J. Feyen, and J. Berlamont. Downstream control algorithm for irrigation canals. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 120(3) :468–483, 1994.
- J. Löfberg. Yalmip : A free MATLAB Toolbox for rapid prototyping of optimization problems. http://www.mathworks.com/matlabcentral/newsreader/view_thread/59636, January 2004.
- P. Loreti and M. Mehrenberger. Observabilité uniforme de l'équation des ondes 1D. *Proceedings of ESAIM*, 25 :68–79, December 2008.

- A. Macchelli, S. Stramigioli, A. van der Schaft, and C. Melchiorri. Scattering for infinite dimensional port hamiltonian systems. *Proceedings of the 41st IEEE, Conference on Decision and Control*, pages 4581–4586, December 2002.
- R. Maier, R. Bernard, and D. Gruneau. Boundary conditions for the lattice boltzmann method. *Phys. Fluids*, 8(7) :1788–1801, 1996.
- P.-O. Malaterre. *Modélisation, analyse et commande optimale LQR d'un canal d'irrigation*. PhD thesis, LAAS-CNRS-ENGREF–Cemagref, 1994.
- P.-O. Malaterre. Le contrôle automatique des canaux d'irrigation : l'état de l'art et perspectives. In *AutoArgo2003*, 2003.
- P.-O. Malaterre and J.-P. Baume. Modeling and regulation of irrigation canals : existing application and ongoing researches. *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 4 :3850–3855, October 1998.
- P.-O. Malaterre, D. C. Roger, M. ASCE, and J. Schuurmans. Classification of canal control algorithms. *Journal of irrigation and drainage engineering*, January/February 1998.
- H. E. Mansour. *Modélisation et gestion optimale d'un système d'irrigation complexe : le canal de la Bourne*. PhD thesis, Grenoble INP, Novembre 1999.
- O. Marcou. *Modélisation et Coontrôle d'écoulements à surface libre par la méthode de Boltzmann sur réseau*. PhD thesis, Université de Perpignan, 2009.
- O. Marcou, S. El Yacoubi, and B. Chopard. A bi-fluid lattice boltzmann model for water flow in an irrigation channel. In *7th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry*, pages 20–23, Perpignan, France, september 2006.
- O. Marcou, B. Chopard, S. El Yacoubi, B. Hamroun, L. Lefèvre, and E. Mendes. A lattice boltzmann model for simulation of flows in open channels with application to flows in a submerged sluice gate. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering-asce*, 136(12) :809–822, 2010.
- N. S. Martys and H. Chen. Simulation of multicomponent fluids in complex three-dimensional geometries by the lattice boltzmann method. *Physical Review E*, 53(1), 1996.
- G. R. McNamara and B. J. Alder. Analysis of the lattice boltzmann treatment of hydrodynamics. *Physica A*, 194 :218–228, 1993.
- G. R. McNamara and G. Zanetti. Use of the boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. *Phys. Rev. Lett.*, 61 :2332–2335, Nov 1988. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.61.2332>.
- G. R. McNamara, A. L. Garcia, and B. J. Adler. Stabilization of thermal lattice boltzmann models. *Journal of Statistical Physics*, 81(1/2) :395–408, 1995.
- G. R. McNamara, A. L. Garcia, and B. J. Adler. A hydrodynamically correct thermal lattice boltzmann model. *Journal of Statistical Physics*, 87(5/6) :1111–1121, 1997.

- M. Meusburger, K. Schlacher, and A. Sillaber. Modeling of works water section of a power plant group. *Mathematics and computers in simulation*, 53 :429–435, 2000.
- K. Morris and C. Navasca. Approximation of low rank solution for linear quadratic control of partial differential equations. *Comp. Optim. Appl.*, 46 :93–111, 2010.
- R. Orsi, U. Helmke, and J. B. Moore. A newton-like method for solving rank constrained linear matrix inequalities. *Automatica*, 42(11) :1875–1882, 2006.
- R. Ostfeld, G. Glass, and F. Keesing. Spatial epidemiology : an emerging (or re-emerging) discipline. *Trends in Ecology and Evolution*, 20(6) :328–336, 2005.
- R. Ouared, B. Chopard, and D. Rufenacht. A lattice boltzmann simulation of clotting in stented aneurysms and comparison with velocity or shear rate reductions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 72(2-6) :108–112, 2006.
- H. Ouarit. *Réduction des Systèmes à paramètres distribués, application à la commande optimale robuste des canaux d’irrigation*. PhD thesis, INP de Grenoble, 2004.
- E. W. Packel. A simplification of Gibson’s theorem on discrete operator semigroups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 39, 586–589, 1972.
- A. Parmigiani, J. Latt, N. Kacem, B. Chopard, L. Lefèvre, and D. Anda Ondo. Free surface lattice boltzmann simulation of irrigation canals. *Proceedings ICMMES*, 2011.
- T. Penzl. A matlab toolbox for large lyapunov and riccati equations, model reductions problems, and linear-quadratic optimal control problems, 1999.
- T. Penzl. A cyclic low-rank Smith method for large-sparse Lyapunov equations. *SIAM J. Sci. Comp.*, 21 :1401–1418, 1999/00.
- v. Pham, B. Chopard, L. Lefèvre, D. Anda Ondo, and E. Mendes. Study of the 1d lattice boltzmann shallow water equation and its coupling to build a canal network. *Journal of Computational Physics*, 229 :7373–7400, 2010.
- Y. Qian, D. d’Humières, and P. Lallemand. Lattice bgk models for navier-stokes equations. *Europhys. Lett.*, 17(6) :470–484, 1992.
- P. Roe. Approximate riemann solvers, parameters vectors and differences schemes. *J. Comput. Physics*, 43, 1981.
- D. C. Rogers and J. Goussard. Canal control algorithms currently in used. *Journal of irrigation and drainage engineering*, January/February 1998.
- D. Rothman and S. Zaleski. *Lattice-Gas Cellular Automata : Simple Models of Complex Hydrodynamics*. Cambridge University Press, Collection Aléa Saclay, 1997.
- J. Saak. *Efficient numerical solution of large-scale algebraic matrix equation in PDE control and model order reduction*. PhD thesis, Faculty of Mathematics at Chemnitz University of Technology, July 2009.

- R. Salmon. The lattice Boltzmann method as a basis for ocean circulation modeling. *J. Marine Research*, 57 :503–535, 1999.
- X. Shan and H. Chen. Lattice boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components. *Physical Review E*, 47(3), 1993.
- X. Shan and H. Chen. Simulation of nonideal gases and liquid-gas phase transitions by the lattice boltzmann equation. *Physical Review E*, 49(4), 1994.
- X. Shan, Y. Xue-Feng, and C. Hudong. Kinetic theory representation of hydrodynamics : a way beyond the navier-stokes equation. *J. Fluid Mech.*, 550 :413–441, 2006.
- Y. Shi. *Résolution numérique des équations de Saint-Venant par la technique de projection en utilisant une méthode des volumes finis dans un maillage non structuré*. PhD thesis, Université de Caen-Basse Normandie, Novembre 2006.
- V. Sima and P. Benner. Experimental evaluation of new SLICOT solvers for linear matrix equations based on the matrix sign function. *Proceedings of Int. Symposium on Computer-Aided Control System Design, part of IEEE MCSC*, pages 601–606, September 2008. San Antonio, Texas, USA.
- G. Simson and S. Castelltort. Coupled model of surface water flow, sediment transport and morphological evolution. *Computers & Geosciences*, 32 :1600–1614, 2006.
- R. Slimi. *Automates cellulaires pour la modélisation, la simulation et les applications de l'étalabilité des systèmes distribués*. PhD thesis, Université de Perpignan, 2008.
- R. Slimi, S. El Yacoubi, E. Dumonteil, and S. Gourbière. A cellular automata model for chagas disease. *Applied mathematical modelling*, 33(2) :1072–1085, 2009.
- D. C. Sorensen and Y. Zhou. Direct methods for matrix sylvester and lyapunov equations. *Journal of Applied Mathematics*, pages 277–303, 2003.
- S. Succi. *The Lattice Boltzmann Equations for Fluid Dynamics and Beyond*. Oxford University Press, 2001.
- M. M. Swift, E. Orlandini, W. R. Osborn, and J. M. Yeomans. Lattice boltzmann simulation of liquid-gas and binary fluid systems. *Physical Review E*, 54(5), 1996.
- T.-T. Li. Exact controllability for quasilinear hyperbolic systems and its application to unsteady flows in a network of open canals. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 27 : 1089–1114, 2004.
- T.-T. Li. Exact boundary controllability of unsteady flows in a network of open canals. *Math. Nachr.*, 278 :278–289, 2005.
- T.-T. Li. Observabilité exacte frontière pour des systèmes hyperboliques quasi-linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 342 :937–942, 2006.
- T.-T. Li and B. Rao. Exact boundary controllability for quasilinear hyperbolic systems. *SIAM J. Control Optim.*, 41 :1748–1755, 2003.

- T.-T. Li, B. Rao, and Y. Jin. Semi-global c^1 solution and exact boundary controllability for reducible quasilinear hyperbolic systems. *Mathematical Modeling and Numerical Analysis*, 34(2) :399–408, 2000.
- T.-T. Li, B. Rao, and Y. Jin. Solution c^1 semi-globale et contrôlabilité exacte frontière de systèmes hyperboliques quasi linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 333 (série 2) :219–224, 2001.
- T.-T. Li, B. Rao, and Z. Wang. Contrôlabilité et observabilité unilatérales de systèmes hyperboliques quasi-linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 346 :1067–1072, 2008.
- T.-T. Li(Da-qian Li) and D.-X. Kong. Explosion des solutions régulières pour les systèmes hyperboliques quasi-linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 329 :287–292, 1999.
- N. Thurey. *Physically based Animation of Free Surface Flows with the Lattice Boltzmann Method*. PhD thesis, University of Erlangen-Nuremberg, 2007.
- N. Thurey, U. Rude, and C. Korner. Interactive free surface fluid with lattice boltzmann method. Technical report, University of Erlangen-Nuremberg, 2005.
- E. Toro. A weighted average flux method for hyperbolic conservation laws. *Proc. R. Soc. Lond.*, pages 401–418, 1989.
- A. Valiani, V. Caleffi, and A. Zanni. Finite volumes scheme for the 2d shallow-water equations : application to the malpaset dam-break, 1999.
- M. A. van der Hoef. Introduction to lattice gas cellular automata as a model for simple fluids. In I. J. Pergang and A. Lejeune, editors, *Cellular Automata : Prospects in Astrophysical Applications*, pages 87–118, 1993.
- A. van der Schaft. Port-hamiltonian systems : an introductory survey. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pages 1339–1365, 2006.
- A. van der Schaft. On balancing of passive systems. *Proceedings of the European Control Conference 2007*, pages 4173–4178, July 2007.
- J. A. Villegas. *A port-hamiltonian approach to distributed parameters systems*. PhD thesis, University of Twente, 2007.
- J. von Neuman. *The theory of self-reproducing automata*. University of Illinois Press, 1966.
- v.T. Pham. Modélisation et commande des systèmes à paramètres distribués non linéaire par la méthode de boltzmann sur réseau : application aux canaux d’irrigation, 2009.
- S. Wolfram. Cellular automation fluids 1 : Basic theory. *Journal of Statistical Physics*, 45(3/4) :471–526, 1986.

- X. Q. Xing, D. Butler, and C. Yang. Lattice boltzmann-based single-phase method for free surface tracking of droplet motions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53 :333–357, 2007.
- G. Zanetti. Hydrodynamics for lattice-gas automata. *Phys. Rev. A*, 40 :1539–1548, 1989.
- L. Zhong, S. Feng, and S. Gao. Wind-driven ocean circulation in shallow water lattice boltzmann model. *Advances in atmospheric sciences*, 22(3) :349–358, 2005.
- J. Zhou. *Lattice Boltzmann Methods for Shallow Water Flows*. Springer, 2004a.
- J. G. Zhou. A lattice Boltzmann model for the shallow water equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(32) :3527–3539, 2002.
- Y. Zhou. Wave breaking for a periodic shallow water equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 290 :591–604, 2004b.
- Q. Zou and X. He. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Physics of Fluids*, 9(6) :1591–1598, June 1997.
- E. Zuazua. Controllability of partial differential equations and its semi-discrete approximations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 8(2) :469–513, 2002.
- E. Zuazua. Optimal and approximate control of finite-difference approximation schemes for the 1d wave equation, 2004.
- E. Zuazua. Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods. *SIAM Review*, 47(2) :197–243, 2005a.
- E. Zuazua. Controllability and observability of partial differential equations : Some results and open problems, 2005b.
- E. Zuazua. Controllability and observability of partial differential equations : Some results and open problems. *Handbook of Differential Equations : Evolutionary Differential Equations*, 3 :527–621, 2006.

